

P: Könnten Sie bitte Stetigkeit definieren?

I: Beginne mit der Definition über Folgen

P: Gibt es auch äquivalente Kriterien?

I: Ja das ε - δ -Kriterium, nenne es und erkläre die Anschauung dahinter. Außerdem erkläre ich die globale Bedingung über Urbilder offener Mengen und dass man damit einen Stetigkeitsbegriff in topologischen Räumen hat. In metrischen Räumen ist alles äquivalent. Ich erläutere kurz, was ein topologischer Raum ist: Man hat keinen so direkten Abstandsbegriff, aber trotzdem eine Art Nachbarschaftsbeziehung, nenne die Axiome eines topologischen Raums

P: Ist denn eine Funktion zwischen metrischen Räumen stetig unabhängig von der Metrik?

I: Nein (siehe diskrete Metrik: Alles ist stetig)

P: Wie sieht es auf dem $\mathbb{R}^n$ aus?

I: Wenn man nur Metriken, die von Normen induziert werden, betrachtet, ja, da alle Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind und dann folgt es mittels des Kriteriums über offene Mengen. Sage aber, dass das in meiner ANA2 kein richtiger Satz war.

P: Fragt nach einem besonders schnellen Beweis, dass die Verkettung stetiger Funktionen stetig ist.

I: Urbild von Urbild wieder offen.

P: Beweis von Bolzano-Weierstrass (in $\mathbb{R}$).

I: Beweist den Satz inklusive Skizze.

P: Was bedeutet Kompaktheit?

I: Fange an mit offenen Überdeckungen und dass dies äquivalent zu jeder Folge hat konvergente TF ist und in $\mathbb{R}^n$ auch äquivalent zu beschränkt und abgeschlossen ist. Er wollte eigentlich nur die letzteren beiden hören.

P: Was bedeutet Differenzierbarkeit im Eindimensionalen?

I: Schreibt kurz die Definition über den Differenzenquotienten hin und erläutert durch eine kurze Umformung, dass differenzieren approximieren durch eine lineare Funktion ist.

P: Kennen sie Differenzierbarkeitsbegriffe im Mehrdimensionalen?

I: Ja, partielle und totale Differenzierbarkeit. Ich gebe knapp die Definitionen wieder und erkläre die anschauliche Bedeutung.

P: Wie hängen diese Begriffe zusammen?

I: total $\Rightarrow$ partiell und stetig partiell $\Rightarrow$ total. Ich erkläre, dass partielle Diffbarkeit für totale nicht ausreicht, da man nicht weiß, was in eine beliebige Richtung passiert, wenn man nur entlang der Einheitsvektoren ableiten kann.

P: Wenn alle Richtungsableitungen existieren, ist die Funktion dann total differenzierbar?

I: Wir hatten keinen solchen Satz also wahrscheinlich nicht, aber intuitiv könnte es finde ich schon sein.

P: Ja das ist tatsächlich falsch. Könnten sie mir beweisen, dass stetig partiell $\Rightarrow$ total?

I: Führe den Beweis, an einer Stelle habe ich den Betrag einen Schritt zu früh abgeschätzt, aber das war überhaupt nicht schlimm, er war schon sehr zufrieden, dass ich die Beweisidee kannte und die einzelnen Schritte weitgehend ausführen konnte.

P: Wir hatten es ja schon über partiell differenzierbar führt nicht zwingend zu total differenzierbar.

Kennen Sie denn auch eine Beispielfunktion, die partiell differenzierbar ist, aber gar nicht stetig?

I: Ja: $x_1 x_2 / (x_1^2 + x_2^2)$.

P: Können Sie mir das Integral definieren im Eindimensionalen?

I: Definiert es über Riemannsummen und erläutert kurz, dass dann praktischer Weise zB stetige Funktionen immer integrierbar sind.

P: Kennen Sie denn ein Beispiel für eine nicht Riemann-integrierbare Funktion?

I: Ja: 1 auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und 0 auf $\mathbb{Q}$, da jede Obersumme 1 und jede Untersumme 0 ist.

P: Fragt nach Bedingungen für Extrema im Mehrdimensionalen.

I: Nennt notwendige und hinreichende Bedingungen und erläutert ganz knapp, warum das jeweils so

ist.

P: Ist die Hesse Matrix denn immer diagonalisierbar?

I: Wenn die Fkt zwei mal stetig partiell diffbar ist, ist die Hesse Matrix symmetrisch nach dem Satz von Schwartz und damit nach dem Spektralsatz diagonalisierbar über $\mathbb{R}$. Ansonsten ggbf nicht.

Ich fand die Prüfung sehr fair und es war eine gute Atmosphäre. Ich hatte nur Analysis 1 bei ihm gehört, aber da er schon andere Prüflinge vorher hatte, bei denen das genau so war, wusste er ziemlich gut, was ich gemacht hatte und was nicht, das war also kein Problem. Ich war froh, dass er nicht sehr detailversessen bei den Beweisen war. Es war insgesamt auch eher eine Art von Gespräch, obwohl das in diesem Prüfungsprotokoll natürlich nicht so ganz durchkommt.