

Nachklausur Stochastik

Elmar Teufel, SS25

Teil I) Ohne Hilfsmittel (30 Minuten)

- 1) (4 Punkte) Was genau besagen die Axiome von Kolmogorov?
- 2) (5 Punkte) Formulieren sie das Lemma von Borell und Cantelli (zwei Aussagen)
- 3) (5 Punkte) Wie lautet die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit genau? Worauf muss geachtet werden?
Formulieren sie die einfache Formel von Bayes und beweisen sie diese
- 4) (8 Punkte) Formulieren sie die σ -Stetigkeit (zwei Aussagen) und beweise eine davon.
- 5) (8 Punkte) Formulieren sie das starke Gesetz der Großen Zahlen und das Gesetz der Großen Zahlen in $\mathcal{L}^2$?
Beweise das starke Gesetz der großen Zahlen in $\mathcal{L}^2$.

Teil II) Mit Hilfsmittel (ca 70 Minuten)

- 6) (12 Punkte) Es seien X, Y unabhängige und auf $\{0, 2, 3\}$ uniform verteilte Zufallsvariable.
Ist die Verteilung von $X \cdot Y$ diskret oder absolut stetig?
Bestimme die Zähldichte oder Dichte von $X \cdot Y$.
Berechnen sie $E(X \cdot Y)$ und $Var(X \cdot Y)$
- 7) (12 Punkte) Es seien $X, X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^1$ und es gelte $X_n \rightarrow X$ in $\mathcal{L}^1$.
Zeigen Sie $E(X_n) \rightarrow E(X)$
- 8) (6+10=16 Punkte) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und $Ber(p)$ -verteilt, wobei $p \in [0, 1]$.
Weiter sei Y die Anzahl der konsekutiven Doppelerfolge im Tupel $(X_1, \dots, X_n)$:

$$Y = |\{k \in \{1, \dots, n-1\} : X_k = X_{k+1} = 1\}|$$

Bestimme $E(Y)$ und $Var(Y)$

- 9) (8+8=16 Punkte)
 - a) Ein zufälliges Experiment wird mit der uniformen Verteilung auf dem Intervall $[a, b]$ modelliert, wobei a und b unbekannt sind. Von einer Beobachtung x sind die Kennzahlen $s^2(x) = 3$ und $\bar{x} = 4$ bekannt. Bestimmen sie einen Momentenschätzer für a, b zu dieser Beobachtung.
 - b) Ein zufälliges Experiment wird mit der Dichte f_θ mit $f_\theta(x) = \theta^2 x e^{-\theta x} \mathbb{1}_{]0, \infty[}(x)$ modelliert, wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter sei.
Bestimmen sie mithilfe der Maximum-Likelihood-Methode einen Schätzer für θ zur Beobachtung $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $x_k \in [0, \infty[$ für alle k .
- 10) (6+8=14 Punkte) Ein Bienenvolk der Westlichen Honigbiene (*Apis mellifera*) sammelt pro sonnigem Sommertag erwartungsgemäß 900g Honig. Die Standardabweichung der gesammelten Honigmasse pro Tag ist gleich 300g.
Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass das Volk an 64 zufällig gewählten sonnigen Sommertagen mehr als 60kg Honig sammelt?
Wie viele sonnige Sommertage sind näherungsweise minimal nötig, damit das Bienenvolk mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mehr als 60kg Honig sammelt?