

Aufgabe 1:

ID:

(4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 7 & 1 \\ 6 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die LR-Zerlegung der Matrix A , wobei L eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen und R eine obere Dreiecksmatrix ist, sodass gilt $A = LR$.

Aufgabe 2:

ID:

(2 + 2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x \in [0, 2]$$

und die drei Knoten

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

- (a) Konstruiere das quadratische Interpolationspolynom $P_2(x)$, das durch die Punkte

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$$

verläuft. Sie können entweder die Newton-Form oder die Lagrange-Form verwenden.

- (b) Definiere das numerische Integral

$$Q(f) := \int_0^2 P_2(x) dx$$

und berechnen Sie den Näherungswert.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Näherungswert der Simpson-Regel

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \approx \frac{h}{6} \left(f(x_0) + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f(x_0 + h) \right)$$

und kommentieren Sie kurz.

Aufgabe 3 : Sei $f \in C^n([a, b])$, und seien $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ paarweise verschieden.

- (a) Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [\min(x_0, \dots, x_n), \max(x_0, \dots, x_n)]$ gibt, sodass die n -te dividierte Differenz erfüllt:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

- (b) Überprüfen Sie, dass für $n = 1$ dieses Ergebnis auf den klassischen Mittelwertsatz der Differentialrechnung zurückfällt:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

Aufgabe 4:

ID:

(2 + 2 Punkte)

Betrachtet wird die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0.$$

- (a) Die Funktion $f(t, x)$ sei stetig auf $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ und genüge mit nicht-negativen, stetigen und beschränkten Funktionen $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ der Wachstumsbedingung

$$\|f(t, x)\| \leq \alpha(t)\|x\| + \beta(t), \quad (t, x) \in D.$$

Zeigen Sie, dass die zugehörige AWA eine globale Lösung besitzt.

- (b) Untersuchen Sie die Lösbarkeitseigenschaften (Eindeutigkeit, globale Existenz, Beschränktheit) der folgenden Anfangswertprobleme:

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \quad \dot{x}(t) = x(t)^{1/3}, \quad t \geq 0, \quad x(0) = 0.$$

Aufgabe 5:

ID:

(2 + 2 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad t \in (0, T), \quad x(0) = x_0 \in D, \quad f: D \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

wobei $D \subset \mathbb{R}^d$.

Wir betrachten das implizite Euler-Verfahren: Für eine Schrittweite $h = T/N$ sind Näherungen $\{y_n\}_{n=0}^N$ definiert durch

$$y_n = y_{n-1} + hf(y_n), \quad n = 1, \dots, N, \quad y_0 = x_0.$$

- (a) Sei nun $f(x) = Ax$ mit einer symmetrisch positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Zeigen Sie für die Näherungen $\{y_n\}$ eine Fehlerabschätzung der Form

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|x(t_n) - y_n\| \leq Ch,$$

wobei $x(t)$ die exakte Lösung des AWP ist. Geben Sie an, von welchen Größen die Konstante $C > 0$ abhängen kann (jedoch nicht von h).

- (b) Im nichtlinearen Fall (f nichtlinear) wird die Gleichung $y_n = y_{n-1} + hf(y_n)$ in jedem Zeitschritt mit dem Newton-Verfahren gelöst. Stellen Sie die vollständige Iterationsvorschrift für die Newton-Iteration auf.