Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle

07.10.2025
9:15 - 10:45 Uhr

Klausur-2 Analysis IV / Mathematik für Physiker IV
SS 2025

Name: **Matrikelnummer:**

Funktionentheorie:	**Aufgaben 1-3**
gewöhnliche Differentialgleichungen:	**Aufgaben 4-6**
Integralsätze:	**Aufgaben 7-8**

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

AUFGABE 1:
Definieren Sie den Begriff des Residuum und formulieren Sie den Residuensatz.

AUFGABE 2:
Geben Sie mit Begründung an, ob die folgenden holomorphen Funktionen in $z = 0$ eine hebbare Singularität, einen Pol oder eine wesentliche Singularität haben.

1. $f(z) := \sin(z)/z$.
2. $g(z) := z(e^{1/z} - e^{-z})$.
   (Hinweis: Verwenden Sie $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$)
3. $h(z) := \dfrac{e^z + e^{-z}}{z^4}$.

AUFGABE 3:
Es sei f holomorph in $\mathbb{C} - \{0\}$ mit $|f(z)| \leq |z|^k + 1/|z|^k$ für $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ und $k \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie

$$f(z) = \sum_{l=-k}^{k} c_l z^l \quad \text{für } z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

und geeignete $c_{-k}, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ mit $|c_{-k}|, |c_k| \leq 1$.

AUFGABE 4:
Definieren Sie den Begriff der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung und formulieren Sie den Satz von Peano.

AUFGABE 5:
Bestimmen Sie alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'' + y = \sin(2t).$$

(Hinweis: Verwenden Sie z.B. die Methode der Variation der Konstanten.)

AUFGABE 6:
Geben Sie eine Basis des Lösungsraumes des Differentialsystems

$$y' = y + z,$$
$$z' = z,$$

an.

AUFGABE 7:
Berechnen Sie für $f(x, y) := (3y + 2x^3y^2, y^2 + x^4y) \in \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{E} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2/4 < 1\}$ das Wegintegral

$$\int_{\partial\mathcal{E}} f \cdot \mathrm{d}s.$$

AUFGABE 8:
Berechnen Sie für $f(x, y, z) := (z, y + 4z^2y, (x^2 + y^2)z) \in \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{E} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 4z^2 < 1\}$ das Oberflächenintegral

$$\int_{\partial\mathcal{E}} f \cdot \nu_{\mathcal{E}} \; darea_{\partial\mathcal{E}}.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Integralsatz von Gauss, die Substitutionsformel, die Zwiebelformel und $area(\partial B_1(0)) = 4\pi$.)

$$\frac{f(z) - f(0)}{g(z) - g(0)}$$

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

x^n ~~(f(x)~~

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\frac{x^n f(x)}{x^m g(x)}$$

$$\frac{n x^{n-1} f(x) + x^n f(}{m x}$$

$$\sin(x)^2 = \cancel{\cos(2x)} \frac{-\cos(2x) + \cos(0)}{2}$$

$$= \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$^2(2t)$