

Analysis IV  
SS 2014  
Anwesenheitsübung I

**! Keine bzw. ohne Hilfsmittel !**

**AUFGABE 1:**

Definieren Sie den Begriff der holomorphen Funktion und geben Sie die Cauchy-Riemann-Gleichungen an.

**AUFGABE 2:**

Geben Sie mit Beweis an, auf welchen Mengen die folgenden Funktionen holomorph sind, und geben Sie mit Beweis eine Potenzreihenentwicklung im Nullpunkt an, falls eine solche existiert.

1.  $f(z) := \bar{z}$ .
2.  $g(z) := 1/(1-z)$ .
3.  $h(z) := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2z}$  für  $z \neq 0$  und  $h(0) := 1$ .  
(Hinweis: Verwenden Sie  $\exp(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$ .)

**AUFGABE 3:**

Zeigen Sie

$$\int_{\partial B_1(0)} z^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1, n \in \mathbb{Z}, \\ 2\pi i & n = -1, \end{cases}$$

und berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial B_1(0)} \exp(1/z) dz.$$

(Hinweis: Verwenden Sie  $\exp(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$ .)

**Bitte wenden !**

**AUFGABE 4:**

Zeigen Sie

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

sind die holomorphen Fortsetzungen der reellen Funktionen  $\cos$  und  $\sin$  auf ganz  $\mathbb{C}$  und

$$(\cos z)' = -\sin z \quad \text{und} \quad (\sin z)' = \cos z,$$

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie für  $\cos z = w$  gilt

$$e^{iz} \in \{w \pm \sqrt{w^2 - 1}\}$$

und für  $w \neq \pm 1$  existiert lokal um  $w$  eine holomorphe Inverse  $\arccos$  von  $\cos$  gegeben durch

$$\arccos w := -i \log(w \pm \sqrt{w^2 - 1}) = \mp i \log(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

und mit

$$(\arccos w)' = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}}.$$

(Hinweis: Betrachten Sie die quadratische Gleichung  $(e^{iz})^2 - 2we^{iz} + 1 = 0$  und beachten Sie  $(w + \sqrt{w^2 - 1})(w - \sqrt{w^2 - 1}) = 1$ .)