

Klausur: Algebra
Sommersemester 2025

Bearbeitungszeit: 2 Stunden

01.8.2025

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Name des Übungsleiters:

Punkte: (von den Korrektoren auszufüllen!)

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Aufgabe 6	Aufgabe 7	Aufgabe 8
von 9	von 7	von 7	von 6	von 9	von 8	von 8	von 6

erreichte Punkte (von 60): _____

Note: _____

Bitte beachten Sie:

- Handys müssen während der gesamten Klausur ausgeschaltet (**nicht** stummgeschaltet) werden! Smartwatches müssen während der Klausur abgelegt werden.
- Bearbeiten Sie pro Blatt höchstens eine Aufgabe und schreiben Sie die entsprechende **Aufgabennummer** und **Ihren Namen** auf **jedes Blatt**!
- Führen Sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Sie dürfen Sätze aus der Vorlesung verwenden, außer es ist explizit danach gefragt. Falls Sie Sätze der Vorlesung anwenden, zitieren Sie diese (Angabe der Nummer ist nicht notwendig). Wo gerechnet werden muss, schreiben Sie nicht nur die Zahlen hin, sondern erklären und begründen Sie alles, was Sie tun.
- Nach dem Ende der Bearbeitungszeit von 2 Stunden müssen Sie **sämtliche** während des Tests beschriebenen Blätter (auch Schmierpapier), aber nicht Ihren erlaubten DIN A4 Spickzettel, abgeben.
- Die Ergebnisse können im URM eingesehen werden.

Aufgabe 1**(6 Punkte)**

Berechnen Sie die Smith-Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{Z}).$$

Aufgabe 2**(10 Punkte)**

Es sei $\mathbb{Q} \subset K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \zeta)$, wobei $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

- a) Begründen Sie: $\mathbb{Q} \subset K$ ist galois'sch.
- b) Bestimmen Sie den Untergruppenverband von $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ und geben Sie alle Normalteiler von $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ an.
- c) Bestimmen Sie den Zwischenkörperverband von $\mathbb{Q} \subset K$. Für welche Zwischenkörper M von $\mathbb{Q} \subset K$ ist $\mathbb{Q} \subset M$ galois'sch?

Aufgabe 3**(6 Punkte)**

Sei G eine Gruppe der Ordnung 65 und M eine Menge mit $|M| = 19$. Zeigen Sie: Jede Operation von G auf M hat mindestens einen Fixpunkt.

Aufgabe 4**(7 Punkte)**

Bestimmen Sie die Anzahl und Isomorphietypen der 7-Sylowuntergruppen von $\mathbb{A}_7$.

Aufgabe 5**(6 Punkte)**

Beweisen Sie: Gruppen der Ordnung 78 sind einfach.

Aufgabe 6**(8 Punkte)**

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 200.

Aufgabe 7**(10 Punkte)**

Prüfen Sie, ob die folgenden Polynome über den angegebenen Ringen irreduzibel sind. Geben Sie für reduzible Polynome die Zerlegung in irreduzible Polynome an.

- a) $f_1 := X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$,
 $f_2 := X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$.
- b) $g_1 := X^4 + 3X^3 + 6X^2 + 9X + 3 \in \mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$
 $g_2 := X^4 + 2X^2 + 2 \in \mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 8**(7 Punkte)**

Sei p eine Primzahl und $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom, so dass $[f] \in \mathbb{Z}_p[X]$ irreduzibel ist. Zeigen Sie: $f \in \mathbb{Z}[X]$ ist irreduzibel.