

Gedächtnisprotokoll Stochastik Hauptklausur SS25 bei Prof. Teufl. Die Aufgaben waren etwas anderes gestellt. Danke an alle Beteiligten!

1. Teil, Bearbeitung ohne Unterlagen:

1 Was besagen die Axiome von Kolmogorov?

2 Was besagt Gesetz der großen Zahlen genau?

3 Geben Sie Markov-Ungleichung an und beweisen Sie diese.

4 Wie ist fast sichere Konvergenz definiert? Wie ist stochastische Konvergenz definiert? Welche Implikationen gelten im Allgemeinen? Beweisen Sie diese.

5 Wie sind mittlerer quadratischer Fehler, Bias und Standardfehler definiert? Beweisen Sie den Zusammenhang.

2. Teil, Bearbeitung mit Unterlagen:

6 In Europa haben ca. 42% der Menschen die Blutgruppe A, 4% haben Blutgruppe B, 10% haben Blutgruppe AB und ca. 44% haben Blutgruppe O. Dabei haben ungefähr 85% der Menschen Rhesusfaktor R+ bei Blutgruppe A und O. Bei Blutgruppe B sind das 70% und bei Blutgruppe AB sind es ca. 75%. Was ist die Wahrscheinlichkeit davon, dass es Rhesusfaktor R+ bei Blutgruppe O vorliegt?

7

Es gelte $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ für $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkte Ereignisse. Weiter gelte $P(\bigcup_{n \geq 1} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)$ für Ereignisse mit $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$. Zeigen Sie, dass P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

8 Es sei $(X_n)_{n \geq 1}$ mit $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ und $P(X_n = n) = \frac{1}{n}$ gegeben.

- (a) Konvergiert $(X_n)_{n \geq 1}$ stochastisch? (mit Beweis)
- (b) Konvergiert $(X_n)_{n \geq 1}$ in $\mathcal{L}^1$? (mit Beweis)
- (c) Beweisen Sie, dass $(X_{2^k})_{k \geq 1}$ konvergiert fast sicher.

9 Seien X, Y Zufallsvariablen und sei $f(x, y) = cxy 1_D(x, y)$ Dichte mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$ gegeben. Bestimmen Sie Wert von c und $\text{Cov}(X, Y)$. Sind X, Y unabhängig?

10 Es sind angeblich 10% der Menschen mit Blutgruppe B. Versuchen Sie mit Binomialtest zum Signifikanzniveau 5% statistisch nachweisen, dass mehr als 10% Blutgruppe B haben. Sie haben beobachtet, dass aus 5 Personen genau 2 Blutgruppe B besitzen.