Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Professor Dr. R. Schätzle

30.01.2025
14:15 - 15:45 Uhr

Klausur Maß- und Integrationstheorie
WS 2024/25

Name:
Tutor:

Matrikelnummer:
Geburtsdatum:

1	2	3	4	5	6	Σ

AUFGABE 1:

1. Definieren Sie den Begriff der $\sigma-$Algebra.
2. Formulieren Sie den Konvergenzsatz von Lebesgue.

AUFGABE 2:
Es sei $\delta_x : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ das Dirac-Maß im Punkt $x \in \mathbb{R}$, d.h.

$$\delta_x(S) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in S, \\ 0 & \text{für } x \notin S. \end{cases}$$

Geben Sie für die folgenden Maße μ auf $\mathbb{R}$ alle $\mu-$meßbaren Mengen an und bestimmen Sie, welche μ Radon-Maße sind, und begründen Sie Ihre Aussagen.

1. $\mu := \delta_0$.
2. $\mu := \sum_{n=1}^{\infty}(1/n)\delta_{1/n}$.
3. $\mu := \delta_0 + \mathcal{L}^1$.

AUFGABE 3:
Es sei μ ein Mass auf der Menge X mit $\mu(X) = 1$, $h : X \to [0,\infty]$ sei $\mu-$messbar und $A := \int h \, d\mu < \infty$. Zeigen Sie

$$\sqrt{1+A^2} \leq \int \sqrt{1+h^2} \, d\mu \leq 1 + A.$$

AUFGABE 4:
Für $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ setzen wir

$$V_f := \{ (x, y) \mid 0 \leq y < f(x) \}, \quad graph\ f := \{ (x, y) \mid y = f(x) < \infty \}.$$

Zeigen Sie für f lebesguemeßbar, dass

$$\mathcal{L}^2(graph\ f) = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^2(V_f) = \int f \, d\mathcal{L}^1.$$

Zeigen Sie weiter, für f borelmeßbar ist V_f eine Borelmenge.

AUFGABE 5:
Berechnen Sie folgende Integrale.

1. $\int\limits_{B_1(0)} x^2 \, d\mathcal{L}^3(x, y, z)$.

2. $\int\limits_{B_1(0) \cap \{x > 0\}} x \, d\mathcal{L}^3(x, y, z)$.

(Hinweis: Verwenden Sie Kugelkoordinaten $\Phi(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos\varphi \cos\vartheta, r \sin\varphi \cos\vartheta, r \sin\vartheta)$ mit $\det D\Phi(r, \varphi, \vartheta) = r^2 \cos\vartheta$.)

AUFGABE 6:
Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, mit C^1−Rand und äußerer Einheitsnormale ν_Ω .
Zeigen Sie folgende Aussagen.

1.

$$\int\limits_{\partial\Omega} \nu_\Omega(x) \cdot x \; darea_{\partial\Omega}(x) = n\mathcal{L}^n(\Omega).$$

2. Für $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch in Ω , d.h. $\Delta u := \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u = 0$ in Ω , gilt

$$\int\limits_{\partial\Omega} \partial_{\nu_\Omega} u \; darea_{\partial\Omega} = 0.$$