Analysis 2/Mathematik für Physiker 3

Anton Deitmar

Sommersemester 2024

Information:

Es durfte keine CheatSheet oder ähnliches verwendet werden. Die Bearbeitungszeit betrug 90 min.

Es gab 5 Aufgaben und insgesamt 60 Punkte.

1. A) Was ist eine Vervollständigung eines metrischen Raumes und in welchem Sinne ist sie eindeutig? (3)
   B) Wie ist eine Topologie eines metrischen Raumes definiert? (2)
   C) Was ist der Gradient einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und wie drückt man die Richtungsableitungen durch den Gradienten aus? (3)
   D) Was ist eine Dirac-Folge? (2)
   [10 Punkte]

2. A) Für $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\| < 1$ sei $f(x) = \frac{1}{(x_1-1)(x_2-2)}$
   Bestimme die Taylor-Reihe um den Entwicklungspunkt x=0. Konvergiert sie? Stellt sie f dar? (Es reicht, f um den Nullpunkt als konvergente Potenzreihe darzustellen, da diese dann die Taylor-Reihe sein muss.) (8)
   B) Bestimme alle lokalen Extrema von $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + x(y-1) + y^2$. (6)
   [14]

3. A) Seien X, Y metrische Räume und $f, g: X \to Y$ $stetig. Ist$ die $Menge$ $A = \{x \in X: f(x) \neq g(x)\}$ offen? (Antwort mit Begründung) (6)
   B) Gibt es eine bijektive, in den beiden Richtungen stetig differenzierbare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ so $dass$ $|detDf(x)| = \|x\|$ $für$ $jedes$ $x \in \mathbb{R}^2$ $gilt$? (Antwort mit Begründung) (6)
   [12]

4. Bestimme die Lösung und das maximale Existenzintervall des Anfangswertproblems $y' = y^{1-a}, y(0) = 1$ mit $a > 0. Hierbei$ sei $f(x,y) = y^{1-a} = e^{(1-1)logy}$ $definiert$ auf $\mathbb{R} \times U = (0, \infty)$. (Antwort mit Begründung)
   [12]

5. Sei $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ mit der Metrik der reellen Zahlen. Zeige, dass eine Teilmenge $A \subset X$ genau dann kompakt ist, wenn $0 \in A$ oder wenn A endlich ist.
   [12]