

AGS Gedächtnisprotokoll WS24/25

1. Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Definiere wann $p \in R$ prim heißt. (4 P)

2. Formuliere und beweise den Satz von Lagrange. (6 P)

3. Zwei Permutationen $\in S_8$ gegeben, davon sollte man die Verknüpfung und Zyklenzerlegung bestimmen, dies als Produkt von Transpositionen bestimmen und das Signum angeben. (4 P)

4. a) Bestimme alle Elemente aus $\mathbb{Z}_{20}^*$ und begründe.

b) Zeige, dass $\alpha: \mathbb{Z}_{20}^* \rightarrow \mathbb{Z}_8$ mit $z \mapsto 3^z$ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist.

c) Bestimme den Kern und das Bild von α . (12 P)

5. Löse das Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_{12}$ und begründe weshalb die Rechenschritte erlaubt sind:

$$3x + 7y = 4$$

$$8x + 5y = 1 \quad (4 \text{ P})$$

6. Seien $f=4t^4+8t^3+9t^2+2t+2$ und $g=2t^3+5t^2+6t+2$ in $\mathbb{Q}[t]$ gegeben. Berechne den Erzeuger des Hauptideals $I=\langle f,g \rangle \mathbb{Q}[t]$. (4 P)

7. a) Zeige, ist K ein Körper, dann ist die folgende Menge U eine Untergruppe von $(\text{Gl}_2(K), \circ)$: $U=\{(1. \text{ Zeile: } 1 \ a, 2. \text{ Zeile: } 0 \ b) \mid a,b \in K, b \neq 0\}$.

b) Hat U im Fall $K=\mathbb{Z}_5$ eine Untergruppe der Ordnung 6? Gib eine solche an oder zeige, dass sie nicht existieren kann. (10 P)

8. Es seien $m,n \in \mathbb{Z}_{>0}$ zwei teilerfremde Zahlen. Zeige hat eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ bei Division durch m und bei Division durch n jeweils Rest r , so hat sie auch bei Division durch $m \cdot n$ den Rest r . (4 P)

9. Zeige: ist $|x|^2$ eine Primzahl für $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, so ist x irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. (4 P)

10. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, so dass für jedes $0 \neq x \in R$ ein eindeutig bestimmtes $y \in R$ existiert mit $xy=x$. a) Zeige, dass R ein Integritätsbereich ist.

b) Zeige, dass R ein Körper ist. (8 P)