

Aufgabe:	Name:	Matrikel:	Punkte:
1			

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Definiere, was ein Normalteiler von G ist. (4)

Aufgabe:	Name:	Matrikel:	Punkte:
2			

Definiere, wann eine Gruppe zyklisch heißt, und beweise, dass eine Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist. (6)

Aufgabe:	Name:	Matrikel:	Punkte:
3			

Betrachte die Permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 9 & 2 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in S_9 \quad (4)$$

Berechne die Permutation $\pi \circ \sigma$ und für diese dann eine Zyklenzerlegung, eine Zerlegung in ein Produkt von Transpositionen sowie das Signum.

Aufgabe:	Name:	Matrikel:	Punkte:
4			

- a. Bestimme alle Elemente von $\mathbb{Z}_{36}^*$ und begründe Deine Antwort. (4)
- b. Bestimme alle Gruppenhomomorphismen (6)

$$\alpha: (S_4, \circ) \longrightarrow (\mathbb{Z}_{41}, +).$$

Aufgabe:	Name:	Matrikel:	Punkte:
5			

Bestimme alle Lösungen des Kongruenzgleichungssystems:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{5} \\ x &\equiv 5 \pmod{9} \\ x &\equiv 2 \pmod{11} \end{aligned} \quad (6)$$

Aufgabe:	Name:	Matrikel:	Punkte:
6			

- a. Zeige, ist K ein Körper, dann ist die folgende Menge eine Untergruppe von $(GL_2(K), \circ)$: (4)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in K, a \neq 0 \right\}.$$

- b. Hat U im Falle des Körpers $K = \mathbb{Z}_7$ eine Untergruppe der Ordnung 5? Gib eine solche Untergruppe an oder zeige, dass keine existieren kann. (4)

Aufgabe:	Name:	Matrikel:	Punkte:
7			

Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins und es sei

$$I = \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : x^n = 0\}. \quad (4)$$

Zeige, I ist ein Ideal in R .

Aufgabe:	Name:	Matrikel:	Punkte:
8			

Für eine ganze Zahl $z = z_n z_{n-1} \dots z_1 z_0 = \sum_{i=0}^n z_i \cdot 10^i$ mit den Ziffern $z_0, \dots, z_n \in \{0, \dots, 9\}$ definieren wir die alternierende Quersumme als

$$AQS(z) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot z_i. \quad (4)$$

Zeige, z ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme $AQS(z)$ durch 11 teilbar ist.

Aufgabe:	Name:	Matrikel:	Punkte:
9			

Es sei p eine ungerade Primzahl. Ein Element $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$ heißt Quadratzahl, wenn es ein $\bar{x} \in \mathbb{Z}_p$ mit $\bar{x}^2 = \bar{a}$ gibt.

- a. Zeige, die Abbildung $\alpha: \mathbb{Z}_p^* \longrightarrow \mathbb{Z}_p^* : \bar{x} \mapsto \bar{x}^2$ ist ein Gruppenhomomorphismus. (2)
- b. Bestimme den Kern von α . (3)
- c. Zeige, im Körper $\mathbb{Z}_p$ gibt es genau $\frac{p+1}{2}$ Quadratzahlen. (3)

Aufgabe:	Name:	Matrikel:	Punkte:
10			

- a. Zeige, ist G eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung $|G| = 8$, dann gibt es in G ein Element der Ordnung 4. (4)
- b. Ist die Aussage in Teil a. noch richtig, wenn G abelsch ist? Beweis oder Gegenbeispiel. (2)