

Analysis 1 - Klausur, Frank Loose, 09.02.2026

Aufgabe 1. (a) Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Ist $g : B \rightarrow A$ eine Abbildung, so dass $g \circ f = id_A$, so ist f injektiv.

(b) Sei $A \neq \emptyset$ und $f : A \rightarrow B$ eine injektive Abbildung. Zeigen Sie, dass es dann eine Abbildung $g : B \rightarrow A$ gibt, so dass $g \circ f = id_A$.

Proof. (a) Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow A$ Abbildungen mit $g \circ f = id_A$. Seien $a_1, a_2 \in A$ mit $f(a_1) = f(a_2)$. Es gilt:

$$a_1 = id_A(a_1) = g \circ f(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = g \circ f(a_2) = id_A(a_2) = a_2.$$

. Daraus folgt, f ist injektiv.

(b) Sei $A \neq \emptyset$, $f : A \rightarrow B$ eine injektive Abbildung. Sei $f^{-1} : im(A) \rightarrow A$ Inverses von $f : A \rightarrow im(A)$. Betrachte beliebiges $a_0 \in A$. Definiere $g : B \rightarrow A$

$$g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b), & \text{wenn } b \in im(A), \\ a_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

So gilt für jedes $a \in A$: $g \circ f(a) = g(f(a)) = f^{-1}(f(a)) = a = id_A(a)$. $\square$

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie mit Hilfe von Vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

(b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Proof. (a) Induktionsanfang ($n = 1$):

$$\sum_{k=1}^1 (2k-1)^2 = 1^2 = \frac{1}{3}3$$

Induktionsschritt ($n \mapsto n + 1$):

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 + (2n+1)^2 \\
 &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1) + (2n+1)^2 \\
 &= \frac{1}{3}(2n+1)[n(2n-1) + 3(2n+1)] \\
 &= \frac{1}{3}(2n+1)(2n^2 + 5n + 3) \\
 &= \frac{1}{3}(2n+1)(n+1)(2n+3).
 \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung.

(b) Mit dem binomischen Lehrsatz folgt:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k 1^{n-k} \binom{n}{k} = (1 + (-1))^n = 0$$

□

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie, dass die unendliche Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie unmittelbar aus der Definition von $\ln$, dass $\ln(n) \leq n - 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und daraus dann, dass die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ divergiert.

Proof. (a) Es gilt:

$$\frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \frac{n!}{n^3} = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \leq \frac{1}{n+1} 2^3 \leq \frac{1}{2}$$

für alle $n > 15$

Und mit dem Quotientenkriterium folgt, die Reihe ist konvergent.

(b) Es gilt:

$$\ln(n) = \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \int_1^n 1 dt = n - 1$$

Und damit insbesondere:

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{\ln(n)} \geq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n-1} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$$

und die Reihe divergiert.

□

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie, dass $\sqrt[3]{2}$ irrational ist.

(b) Begründen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, warum es ein $\xi \in (0, 1)$ geben muss mit $\xi + \ln(\xi) = 0$.

Proof. (a) Angenommen $\sqrt[3]{2}$ sei rational, so gilt

$$\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}, \text{ mit } a, b \in \mathbb{N}, \text{ o.B.d.A. sei der Bruch vollständig gekürzt.}$$

Betrachte nun:

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{a^3}{b^3} \implies a^3 = 2b^3 \\ &\implies a = 2k \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ und } b^3 = \frac{1}{2}a^3 = \frac{1}{2}(2k)^3 = 4k^3 \\ &\implies a, b \text{ gerade} \end{aligned}$$

Dies widerspricht der Voraussetzung, dass der Bruch vollständig gekürzt ist und so folgt $\sqrt[3]{2}$ ist irrational.

(b) Wir wissen:

$$(x + \ln(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$$

Daraus folgt, es gibt ein $x \in (0, 1)$, sodass $(x + \ln(x)) < -1$.

Außerdem gilt $1 + \ln(1) = 1$.

Mit dem Zwischenwertsatz lässt sich schließen, dass ein $\xi \in (0, 1)$ existiert, sodass gilt: $\xi + \ln(\xi) = 0$.

□

Aufgabe 5. (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung: Ist $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) \geq 0$, für alle $x \in (a, b)$, so ist f monoton wachsend.

(b) Zeigen Sie, dass die differenzierbare Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \ln(x)$, genau ein lokales Extremum hat und begründen Sie mit Hilfe des Monotonieverhaltens von f , warum dies ein globales Minimum sein muss.

Proof. (a) Seien $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 < x_2$. Mit dem Mittelwertsatz folgt für ein $\xi \in (x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= f'(\xi)(x_2 - x_1) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

da $f'(\xi) \geq 0$ und $(x_2 - x_1) > 0$

(b) Es gilt

$$f'(x) = \ln(x) + x \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

Insbesondere

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 0 &\iff \ln(x_0) + 1 = 0 \\ &\iff x_0 = e^{-1} \end{aligned}$$

und wir können folgern $f' \upharpoonright_{(0, e^{-1})} < 0$, $f' \upharpoonright_{(e^{-1}, \infty)} > 0$. Insbesondere liegt bei $x_0 = \frac{1}{e}$ ein globales Minimum und das einzige lokale Extremum vor. $\square$

Aufgabe 6. (a) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Partieller Integration eine Stammfunktion von $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ in Termen elementarer Funktionen.

Proof. (a) Substituiere $u(x) = x^2 + 1$, $du = 2x dx$, $u(0) = 1$, $u(1) = 2$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1.$$

(b) Betrachte $u(t) = t$, $u'(t) = 1$ und $v(t) = \ln(t)$, $v'(t) = \frac{1}{t}$.
Mit Hilfe Partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln(t) dt &= (x \ln(x) - 1 \ln(1)) - \int_1^x t \frac{1}{t} dt \\ &= x \ln(x) - (x - 1) \\ &= x \ln(x) - x + 1 \end{aligned}$$

und $F(x) = x \ln(x) - x$ ist eine Stammfunktion von $\ln$. $\square$