

Probeklausur zur Analysis III

Die 1. Aufgabe muss bearbeitet werden, und von den restlichen 8 Aufgaben sollen Sie sich genau 5 auswählen.

Erlaubte Hilfsmittel: Eine Seite mit handschriftlichen Notizen.

Zeit: 90 Minuten.

Aufgabe 1

Kreuzen Sie bitte an:

1. Jede auf einem Gebiet G definierte holomorphe Funktion besitzt dort eine Stammfunktion.

☒ Richtig ☒ Falsch

2. Eine holomorphe Funktion ist automatisch C^∞ .

☒ Richtig ☐ Falsch

3. $\text{Res}_a(f) = 0$ genau dann, wenn die Singularität in a hebbar ist.

☐ Richtig ☒ Falsch

4. Jede holomorphe Funktion ist durch eine einzige Potenzreihe gegeben.

☐ Richtig ☒ Falsch

5. Stets reell ist

☒ $z + \bar{z}$ ☐ $z - \bar{z}$ ☒ $z\bar{z}$

6. Die Jacobi-Matrix einer holomorphen Funktion $f(z) = u(z) + iv(z)$ heißt

☒ $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$

7. Müssen zwei in G holomorphe f und g , die in einem Punkt z_0 gleichen Wert und gleiche Ableitungen haben: $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \geq 0$, notwendig auf dem ganzen Gebiet übereinstimmen?

☐ Nein, Gegenbeispiel $z_0 = 0$, $f(z) = e^z$, $g(z) = 1 + z + z^2 + z^3 \dots$

☒ Ja, denn dann sind f und g konstant
 $f(z) \equiv f(z_0) = g(z_0) \equiv g(z)$

☒ Ja, denn dann hat $f(z) - g(z)$ eine ∞ -fache Nullstelle

8. Wo konvergiert die Laurentreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k$?

☒ Nirgends ☐ für $|z| = 1$ ☐ auf $\mathbb{C}^*$

9. Das Residuum von $\frac{z-a}{z-b}$ an der Stelle $z_0 = b$ ist

☒ $b - a$ ☐ $-(a + b)$ ☐ $\frac{a}{b}$

10. Wie viele maximale Lösungskurven hat $\dot{x} = x^2$ auf $\mathbb{R}$?

☐ 1 ☐ 3 ☐ ∞

Bearbeiten Sie 5 der folgenden 8 Aufgaben:

Aufgabe 2

Finden Sie je ein Beispiel (mit Beweis) für eine

- a) auf ganz $\mathbb{C}$,
- b) in genau einem Punkt,
- c) nirgends komplex differenzierbare Funktion.

Aufgabe 3

Berechne $\int_{\gamma_1,2} \bar{z}^2 dz$, wobei γ_1 die standardparametrisierte Verbindungsgerade zwischen 0 und $1+i$ sei und γ_2 entsprechend die geradlinige Verbindung von 0 zu 1 und dann von 1 nach i . Besitzt $\bar{z}^2$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}$?

Aufgabe 4

Hat der Hauptzweig des Logarithmus Pole? Wenn ja: wo? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5

Es seien γ die glatte Kurve der Skizze (einmal durchlaufen). Bestimmen Sie (mit Begründung!)

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 1} dz.$$

Aufgabe 6

Entwickeln Sie $\log(z)$, den Hauptzweig des Logarithmus um $i-2$ in eine Potenzreihe. Wie groß ist der Konvergenzradius?

Aufgabe 7

Berechnen Sie das folgende uneigentliche reelle Integral $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

Aufgabe 8

Sei G ein Gebiet und $f \not\equiv 0$ auf G holomorph. Warum ist es nicht möglich, dass in G Häufungspunkte von Nullstellen auftreten?

Aufgabe 9

Was besagt der Eindeigkeitsatz für Lösungen von $\dot{x} = f(t, x)$ bei Lipschitz-stetigem f ?

Aufgabe 10

Ist die Riemannsche Vermutung richtig? Begründen Sie Ihre Antwort!