

KLAUSUR ZUR LINEAREN ALGEBRA I

1.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS:

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1$$

$$3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 1$$

$$4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -7$$

2.

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^{99}$$

3. ~~Falsch~~

Berechnen Sie die inverse Matrix zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

4.

Es seien A und B zwei schiefsymmetrischen Matrizen. Zeigen Sie: Die Matrix AB ist auch schiefsymmetrisch genau dann, wenn gilt $AB = -BA$.

5.

Sei $\varphi_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie Basen von $\text{Ker } \varphi_A$ und $\text{Im } \varphi_A$.

6.

Berechnen Sie das Produkt von Permutationen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 1 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

✓7.

Bestimmen Sie das Vorzeichen des Produkts

$$a_{63}a_{15}a_{34}a_{72}a_{47}a_{26}a_{51}$$

in der Determinante von $A = (a_{ij})$.

✓8.

Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

9.

Zeigen Sie, dass 3 Geraden l_1, l_2, l_3 in \mathbb{R}^2

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad l_3 : a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

sich genau dann in einem Punkt schneiden, wenn

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

✓10.

Es seien a_1, a_2, a_3 paarweise verschiedene Zahlen. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

$$a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + a_3^2x_3 = b^2$$

für jedes b eine einzige Lösung besitzt. Bestimmen Sie diese Lösung.

Ihr Vandermonde' Det. $\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} \right| = \prod_{i < j} (a_j - a_i)$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (a_j - a_i) \neq 0$$

KLAUSUR ZUR LINEAREN ALGEBRA I

1.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS:

$$12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$$

$$8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7$$

√ 2.

Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.

Es sei A eine $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie, dass gilt

$$|A^\#| = |A|^{n-1}.$$

√ 4.

Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$ -Matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

√ 5.

Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen des Polynoms

$$P(t) := (t+1)^6 - (t-1)^6.$$

6.

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Polynome f und g :

$$f := t^9 - 1, \quad g := t^6 - 1.$$

7.

Eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ besitzt in einer Basis v_1, v_2 die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Welche Matrix besitzt φ in der Basis $3v_1 + 2v_2, 2v_1 + v_2$?

8.

Es seien U_1 und U_2 zwei Vektorunterräume von V . Zeige: Ist

$$\dim U_1 + U_2 = \dim U_1 \cap U_2 + 1,$$

so ist entweder

$$U_1 + U_2 = U_1, \quad U_1 \cap U_2 = U_2,$$

oder

$$U_1 + U_2 = U_2, \quad U_1 \cap U_2 = U_1.$$

9.

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren der linearen Abbildung

$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -7 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

10.

Zeige: Ist A eine 2×2 -Matrix mit $A^{100} = 0$, so ist $A^2 = 0$.