Lineare Algebra 1 **Klausurvorbereitung**
Winter 2024/25
Professor Deitmar keine Abgabe

1. (Abteilung Sätze und Definitionen)
   (a) Wann heissen Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear unabhaengig?
   (b) Was ist das Signum einer Permutation?
   (c) Was ist die Summe zweier Unterraeume eines Vektorraumes?
   (d) Was besagt der Satz von Cayley-Hamilton?
   (e) Was besagt der Laplace-Entwicklungssatz?
   (f) Was ist ein Eigenwert?
   (g) Was ist das Minimalpolynopm einer Matrix?
2. (Abteilung Rechnen)
   (a) Bestimme die Jordan-Normalform von
   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (b) Invertiere die Matrix
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (c) Seien $K = \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \\ \lambda & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}$, sowie $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimme alle $\lambda \in \mathbb{R}$ für die die Gleichung $Ax = b$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ hat und gib jeweils alle Lösungen an.
3. Sei $K = \mathbb{R}$. Bestimme das charakteristische Polynom von
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$
   und zeige, dass die Eigenwerte 1 und 2 sind.
4. Fuer welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix
   $$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \\ \lambda & 1 & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$
   positiv definit, fuer welche ist sie semidefinit?
5. (Abteilung Beweise, ab hier vollstaendige Begruendungen!)
   Es seien A und B Matrizen aus $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Beweise oder widerlege:
   (a) Ist A^2 diagonalisierbar so ist A diagonalisierbar.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x^t(A + A^t)x = 2x^T Ax$.

(c) Sind A und B orthogonale Matrizen, dann ist $AB = BA$.

(d) Ist A eine orthogonale Matrix mit $\det(A) = -1$, dann hat A den Eigenwert -1.

6. Sei
$$B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right).$$

   (a) Zeige, dass die Matrix B positiv definit ist.

   (b) Bestimme eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarproduktes $b(x, y) = x^t By$.

   (c) Finde eine Matrix $W \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $B = W^t W$.

7. Sei $A \in \mathrm{M}_n(K)$ und $f \in K[x]$ mit $\deg f > 0$ und $f(A) = 0$. Zeige: gilt $f(0) \neq 0$, dann ist A invertierbar.

8. Seien $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $AB = BA$. Sei v ein Eigenvektor von A. Zeige: Ist $Bv \neq 0$, dann ist Bv ebenfalls ein Eigenvektor von A.

9. Gib Basen der folgenden Räume an:

   (a) $\{0\}$

   (b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2 : x + y = 0 \right\}$.

10. Rechne alle Aufgaben aus Langs Buch *Linear Algebra*.

Lineare Algebra 1 – Wintersemester 2024/25
Prof. Deitmar – Haupttermin

Aufgaben

1. (a) Wann heißen Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig? (2)

(b) Was ist ein Eigenwert einer Matrix? (2)

(c) Wann heißt eine Matrix unitär? (2)

(d) Was ist die Vielfachheit einer Nullstelle eines Polynoms $f(x)$? (3)

(e) Was sagt der Jordan-Normalformsatz? (3)

2. (a) Sei $a \in \mathbb{C}$. Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bitte Probe machen und mit aufschreiben. (4)

(b) Bestimme die Jordan-Normalform der komplexen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(4)

(c) Finde die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Grundkörper ist $\mathbb{Q}$. Bitte Probe machen und mit aufschreiben. (4)

3. Seien $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ selbstadjungiert. Zeige, dass AB genau dann selbstadjungiert ist, wenn $AB = BA$ gilt. (6)

4. Beweise oder widerlege:

(a) Für jede Matrix $A \in M_n(K)$ mit $AA^t = I$ gilt $\det(A) \in \{1, -1\}$. (3)

(b) Sind u, v Eigenvektoren der Matrix A, dann ist auch $u + v$ ein Eigenvektor. (Die Eigenvektoren bilden einen Unterraum, den Eigenraum.) (4)

5. Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und sei $\phi : V \to V$ additiv, d.h., es gelte $\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w)$ für alle $v, w \in V$. Zeige, dass ϕ linear ist. (14)