

Hausen LinA1 WiSe 25/26

Klausurenprotokoll

Lorenz Raißle

March 2026

Teil A

Zutreffendes bitte jeweils ankreuzen ☒. Eine Begründung ist nicht erforderlich. Die maximale Punktzahl für Teil A ist 36. Liegen mehr richtig als falsch gesetzte Kreuze vor, so errechnet sich die Punktzahl für Teil A als

Anzahl der richtig gesetzten Kreuze minus Anzahl der falsch gesetzten Kreuze.

Andernfalls wird Teil A mit 0 Punkten bewertet. Jede Aufgabe wird in sich bewertet

Aufgabe 1. Diese Aussage ist richtig falsch

Sind zwei Teilmengen A, B einer beliebigen Menge X nicht leer,
so ist auch $A \cap B$ nicht leer

Jede elfelementige Menge ist eine Vereinigung dreielementiger Teilmengen

Für je drei Teilmengen $A, B, C \subseteq X$ einer beliebigen Menge X gilt
 $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Ist eine Abbildung $\varphi : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ injektiv, so ist φ auch surjektiv

Die Abbildung $C_3 \rightarrow C_3, \bar{a} \mapsto \bar{a} + \bar{a}$ ist injektiv

Die Abbildung $C_4 \rightarrow C_4, \bar{a} \mapsto \bar{a} + \bar{a}$ ist injektiv

Eine Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ ist genau dann injektiv,
wenn $A \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(A))$ für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt

Eine Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ ist genau dann surjektiv,
wenn $B \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(A))$ für jede Teilmenge $A \subseteq Y$ gilt

Aufgabe 2. Diese Aussage ist	richtig	falsch
Sind e und e' neutrale Elemente einer Gruppe G so gilt $e = e'$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Besitzt eine Gruppe genau 6 Elemente, so ist sie abelsch	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt eine abelsche Gruppe mit genau 4800 Elementen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt einen kommutativen Ring mit genau 17 Elementen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Jeder kommutative Ring mit genau 4 Elementen ist ein Körper	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist ein Ring nicht kommutativ, so besitzt er keine Einheiten	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt einen Körperhomomorphismus $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\varphi(2) = -2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt einen Körperhomomorphismus $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\varphi(2I) = -2I$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 3. Diese Aussage ist	richtig	falsch
Jede Familie der Form (v_1, v_2, v_3) in \mathbb{Q}^2 ist linear abhängig	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sind (v_1, v_2) und (v_2, v_3) linear unabhängige Familien in \mathbb{C}^3 , so ist auch (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig in \mathbb{C}^3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist $V \leq \mathbb{R}^5$ ein zweidimensionaler Untervektorraum, so besitzt \mathbb{R}^5 eine Basis v_1, \dots, v_5 mit $v_2, v_4 \in V$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sind V und W zwei \mathbb{R} -Vektorräume der Dimension 12, so gilt $V \cong W$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt einen \mathbb{C}_5 -Vektorraum mit genau 104 Elementen	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Besitzt ein \mathbb{Q} -Vektorraum mehr als ein Element, so besitzt er bereits unendlich viele Elemente	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sind $U, V \subseteq \mathbb{R}^9$ zweidimensionale Untervektorräume mit $U \neq V$, so gilt $\dim(U) + \dim(V) = \dim(U + V)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - 1, y)$ ist linear	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist $\varphi : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$ eine Abbildung mit $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in \mathbb{Q}^2$, so ist φ linear	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ eine Abbildung mit $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in \mathbb{C}^2$, so ist φ linear	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist $\varphi : U \rightarrow V$ eine injektive lineare Abbildung von \mathbb{C} -Vektorräumen, so gilt $\dim(U) \leq \dim(V)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $\mathbb{R}^2 = \text{Kern}(\varphi) \oplus \text{Bild}(\varphi)$, so gilt $\varphi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 4. Diese Aussage ist	richtig	falsch
Besitzt eine Matrix $A \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q})$ eine Nullzeile, so besitzt A den Zeilenrang 2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist $A \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q})$ ein Produkt von mehr als drei Elementarmatrizen, so ist A nicht invertierbar	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Besitzt $A \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q})$ nur ganzzahlige Einträge, so gilt $\det(A) \in \mathbb{Z}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Besitzt $A \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q})$ die Determinante 1, so hat A mindestens einen ganzzahligen Eintrag	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Besitzt eine Matrix $A \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q})$ einen Eigenwert der algebraischen Vielfachheit 2, so ist A diagonalisierbar	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Besitzt eine Matrix $A \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q})$ einen Eigenwert der geometrischen Vielfachheit 3, so ist A eine Diagonalmatrix	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist $A \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q})$ vom Rang 1 und besitzt A den Eigenwert 2, so ist A diagonalisierbar	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist $A \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q})$ vom Rang 2 und besitzt A den Eigenwert 1, so ist A diagonalisierbar	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Teil B

Bitte für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden.
Auf jedem Blatt oben rechts Namen angeben
Es werden nur Punkte für das richtige Ergebnis vergeben und nicht für den Rechenweg
 Die maximale Punktzahl für Teil B ist 44

Aufgabe 5. (16 Punkte) Bei dieser Aufgabe muss die richtige Anzahl in das dafür vorgesehene Kästchen geschrieben werden. Pro richtige Antwort gibt es 2 Punkte.

Es gibt genau Elemente $\sigma \in S_3$ mit $\sigma^3 = \text{id}$

Es gibt genau Transpositionen in S_5

Es gibt genau Untervektorräume des Vektorraum C_3^3

Es gibt genau Elementarmatrizen in $\text{Mat}(2, 2; C_2)$

Es gibt genau invertierbare Matrizen in $\text{Mat}(2, 2; C_2)$

Es gibt genau diagonalisierbare Matrizen in $\text{Mat}(2, 2; C_2)$

Es gibt genau lineare Abbildungen $\varphi : C_3^2 \rightarrow C_3^2$ mit $\varphi(\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{0})$

Es gibt genau lineare Abbildungen $\varphi : C_3^2 \rightarrow C_3^2$ mit $\varphi(\bar{2}, \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{1})$

Aufgabe 6. (4 Punkte) Bilde die Inverse Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 + I & -1 \\ 1 & 1 - I & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{C})$$

Aufgabe 7. (4 Punkte) Bestimme die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ aller Punkte $v \in \mathbb{R}^3$, sodass v auf mindestens zwei der folgenden Geraden $G_1, G_2, G_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ liegt: 4 Punkte

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M = \boxed{\phantom{\mathbb{R}^3}}$$

Aufgabe 8. (10 Punkte) Betrachte die lineare Abbildung $\varphi : C_5 \rightarrow C_5, x \mapsto A \cdot x$

$$A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3, 3; C_5)$$

Bestimme das charakteristische Polynom P_φ , die Eigenwerte von φ und eine Basis aus Eigenvektoren mit v_1, v_2, v_3

Aufgabe 9. (10 Punkte) Bestimme die darstellende Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$

$$\mathcal{B} := ((1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 1))$$

$$\mathcal{C} := ((1, 0, -1), (0, 1, 0), (0, 1, 1))$$

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_3 \\ -3x_3 - 4x_2 + 8x_3 \end{pmatrix}$$