Aufgabe 1

(5 Punkte)

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von $a = 245$ und $b = 8$ mithilfe des Euklidischen Algorithmus. Ist $[245]$ invertierbar in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$? Geben Sie gegebenenfalls das Inverse von $[245]$ an.

Aufgabe 2

(8 Punkte)

Sei $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Schreiben Sie folgendes lineares Gleichungssystem in Matrixform $Ax = b$ für eine Matrix A und einen Vektor b.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ tx + z &= 1 \\ tx + ty + z &= 1 + t \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösungsmenge gegebenenfalls in parametrisierter Form und als eine Darstellung mittels $\mathrm{Ker}(A)$ an, wobei $\mathrm{Ker}(A)$ durch eine Basis gegeben sein soll.

Aufgabe 3

(5 Punkte)

Invertieren Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

(13 Punkte)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$$

die Jordannormalform und eine Basis bezüglich derer A in Jordannormalform ist.

Aufgabe 5

(2+3+2=7 Punkte)

Es seien $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ und $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ die $\mathbb{R}$-Vektorräume der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 beziehungsweise vom Grad ≤ 4. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} &\to \mathbb{R}[x]_{\leq 4} \\ f &\mapsto (x^2 + 1)f. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie: φ ist $\mathbb{R}$-linear und injektiv.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_B M_{B'}(\varphi)$ bezüglich der Basen $B = (1, x, x^2)$ von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ und $B' = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ von $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$.

(c) Bestimmen Sie die Dimensionen $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\varphi))$ und $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\varphi))$.

Aufgabe 6

(3+3=6 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und U_1, U_2 und U_3 Unterräume von V.

(a) Zeigen Sie: $(U_1 \cap U_2) + U_3 \subset (U_1 + U_3) \cap (U_2 + U_3)$.

(b) Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die umkehrte Inklusion, $\supset$, im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 7

(8 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ und χ_A das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) 0 is Eigenwert von A.

(2) A ist nicht invertierbar.

(3) χ_A enthält keinen konstanten Term.

Aufgabe 8

(4+4=8 Punkte)

(a) ~~Nennen Sie die Definition~~ eines reellen Skalarproduktes und führen Sie alle Axiome ausführlich aus.

(b) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^3$. Mit $x \cdot y$ bezeichnen wir das *euklidische Standardskalarprodukt* von x und y und definieren das *Vektorprodukt* von x und y durch:

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie: $(x \times y) \cdot z = det \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, wobei wir x, y und z als Spalten einer Matrix auffassen.