

ERSTE ÜBUNGSKLAUSUR ZUR LINEAREN ALGEBRA 1

Informationen zur Klausur: Bitte melden Sie sich auf <https://urm.math.uni-tuebingen.de/> zur ersten Teilklausur oder zum ersten Teilttest an. Beide finden statt am Montag, 25.6.2018 um 12:15 Uhr in Hörsaal N6 und dauern 60 Minuten. Die Klausur hat voraussichtlich 8 Aufgaben. Wenn Sie die Klausur als Prüfungsleistung schreiben, bearbeiten Sie alle 8 Aufgaben; wenn Sie sie als Test = Studienleistung schreiben, dann bearbeiten Sie nur die ersten 6 Aufgaben. Die Note auf die Prüfungsleistung beruht auf dem Mittelwert der ersten und zweiten Teilklausur.

Bücher, Notizen und elektronische Hilfsmittel sind bei der Klausur/dem Test nicht erlaubt. Ich muss Sie darauf hinweisen, dass bei der Klausur/dem Test Abschreiben und unerlaubte Kommunikation mit anderen Personen Verletzungen der akademischen Integrität darstellen und schwerwiegende Konsequenzen haben können. Der Stoff der ersten Teilklausur/des ersten Teilttests ist Kapitel 1–4 aus dem Skript und die Übungsblätter 1–7. Alle Fakten, die in der Vorlesung oder dem Repetitorium erwähnt oder in den Übungen bewiesen wurden, dürfen ohne Beweis benutzt werden. Eine unübersichtliche, unklare oder unleserliche Darstellung kann zu Punktabzug führen. Streichen Sie falsche oder irreführende Teile Ihres Aufschriebs, die nicht bewertet werden sollen, deutlich durch.

Anleitung zu dieser Übungsklausur: Sie können die Aufgaben zu Hause lösen; sie werden nicht korrigiert. Diese Übungsklausur ist länger als die echte Klausur; ihre vorgesehene Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Die erreichbaren Punktzahlen addieren sich auf 100. Es ist vorgesehen, dass Sie keine Bücher, Notizen oder elektronische Hilfsmittel benutzen.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch? (24 Punkte)

Kreuzen Sie W an, wenn die Aussage wahr ist und F, wenn die Aussage falsch ist. Ein richtig gesetztes Kreuz gibt 2 Punkte, kein Kreuz gibt 0 Punkte und ein falsch gesetztes Kreuz gibt -2 Punkte. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet. Sie brauchen keine Begründungen anzugeben.

- W F Die Addition von Matrizen ist kommutativ.
- W F Jeder Vektorraum hat eine endliche Basis.
- W F Die Anzahl der Elemente eines \mathbb{Z}_2 -Vektorraums ist stets entweder ∞ oder eine Zweierpotenz.
- W F $(AB)^2 = A^2B^2$ für alle $n \times n$ -Matrizen A, B .
- W F Die Vektoren v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig, wenn jede Linearkombination von v_1, \dots, v_n die Null ergibt.
- W F Ein lineares Gleichungssystem mit 4 Unbekannten, dessen Koeffizientenmatrix A Rang 3 hat, kann unendlich viele Lösungen haben.
- W F Ist (A', b') das Ergebnis einer Folge von elementaren Zeilenumformungen von (A, b) , so haben $Ax = b$ und $A'x = b'$ dieselbe Lösungsmenge.
- W F Die Menge der reellen Polynome, in denen nur ungerade Exponenten auftreten, ist ein Unterraum des Vektorraums aller reellen Polynome.

Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Matrizen $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ korrekt?

- W F $\det(A + B) = \det A + \det B$
- W F $\det(AB) = \det(BA)$
- W F $\det(A^T) = \det(A)$
- W F $\det(2A) = 2 \det(A)$

Aufgabe 2: Inverse Matrix (8 Punkte)

Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{bmatrix}$, wobei a, b, c Parameter sind.

Berechnen Sie A^{-1} nach dem Gauß-Jordan-Verfahren. Überprüfen Sie Ihre Antwort, indem Sie $A^{-1}A$ berechnen.

Aufgabe 3: Zeilenumformung (6 Punkte)

Für jede der angegebenen Matrizen: Kann man sie aus $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ durch eine *einzelne* elementare Zeilenumformung erhalten?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ja ja ja ja ja ja
 nein nein nein nein nein nein

Aufgabe 4: Determinante (6 Punkte)

Sei $R = \begin{bmatrix} a & u & w \\ 0 & b & v \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, wobei $a > 0, b > 0, c > 0$ und u, v, w reelle Zahlen sind. Sei $A = R^T R$.

Benutzen Sie Eigenschaften der Determinante, um $\det(A)$ durch a, b, c, u, v, w auszudrücken.

Aufgabe 5: Basiswechsel (6 Punkte)

Es seien $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis des \mathbb{R}^3 und $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ eine Basis des \mathbb{R}^2 gegeben durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diejenige lineare Abbildung, deren Matrixdarstellung bezüglich der kanonischen Basen \mathcal{K}^2 und \mathcal{K}^3 gegeben ist durch

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}^3}^{\mathcal{K}^2}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(L)$ von L bezüglich der Basen \mathcal{A} und \mathcal{B} .

Aufgabe 6: Matrix-Multiplikation (3 Punkte)

Finden Sie ein Beispiel einer 2×2 -Matrix $A \neq 0$, so dass $A^2 = 0$.

Aufgabe 7: Gauß-Verfahren (6 Punkte)

Benutzen Sie elementare Zeilenumformungen nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren, um die gegebene Matrix in allgemeine Zeilenstufenform zu bringen. Welchen Rang hat die Matrix? Geben Sie jeweils im Kästchen an, welche Zeilenumformung Sie verwenden (z.B. $R_3 + 3R_2$ oder R_{11}). (Die Zahl der Schritte kann geringer sein als die der eingezeichneten Felder für Matrizen.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{} \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: Reguläre Matrix (3 Punkte)

Formulieren Sie die Definition von "regulär". (Es reicht dabei nicht, einen Begriff anzugeben, der synonym ist mit "regulär". Sie dürfen Symbole wie \exists verwenden.) Eine Matrix $A \in M(n, \mathbb{K})$ heißt regulär, wenn folgendes gilt:

Aufgabe 9: Wahr oder falsch? (15 Punkte)

Wenn wahr, geben Sie eine Begründung; wenn falsch, geben Sie ein Gegenbeispiel.

- a) Wenn U und V irgendwelche Unterräume von \mathbb{R}^{10} sind mit $\dim U = 7$ und $\dim V = 3$, dann ist $U + V = \mathbb{R}^{10}$.
- b) Wenn die Matrix A breiter als hoch ist ($m < n$), dann hat die Gleichung $Ax = 0$ eine Lösung $x \neq 0$.
- c) Wenn die Einträge von $A \in M(n, \mathbb{R})$ und A^{-1} alle ganze Zahlen sind, dann liegen sowohl $\det A$ als auch $\det(A^{-1})$ in $\{+1, -1\}$.
- d) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ für alle reellen 2×2 -Matrizen A, B .
- e) Wenn $A \in M(n, \mathbb{R})$ regulär ist und $B \in M(n, \mathbb{R})$ singulär, dann ist $A + B$ regulär.

Aufgabe 10: Beweis (10 Punkte)

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit $\dim V = n$ und $U \subset V$ ein Unterraum mit $\dim U = n - 1$. Zeigen Sie:

Ist W ein Unterraum von V , so ist $\dim(W \cap U) \geq \dim W - 1$.

Aufgabe 11: Matrix-Darstellung eines Endomorphismus (7 Punkte)

Sei $P_{\mathbb{R}}^{(n)}$ der Vektorraum aller reellen Polynome $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ vom Grade $\leq n$. Sei L die lineare Abbildung von $P_{\mathbb{R}}^{(1)}$ nach $P_{\mathbb{R}}^{(2)}$ gegeben durch

$$Lp(x) = 3x^2 \frac{d}{dx} p(x) + (4x + 5)p(x).$$

Bestimmen Sie die 3×2 -Matrix $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(L)$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (1, x)$ von $P_{\mathbb{R}}^{(1)}$ und der Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ von $P_{\mathbb{R}}^{(2)}$.

Aufgabe 12: Lineare Abhängigkeit (6 Punkte)

a) Ist die folgende Menge linear abhängig oder unabhängig in \mathbb{R}^3 ? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Gibt es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$L \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

(Beachten Sie, dass es sich um dieselben Vektoren wie bei Teil a) handelt.) Begründen Sie Ihre Antwort.

LINEARE ALGEBRA 1: TEILKLAUSUR/TEILTEST 1

Name:
Diese Leistung ist <input type="checkbox"/> Studienleistung <input type="checkbox"/> Prüfungsleistung

Matrikelnummer:	Geburtsdatum:
-----------------	---------------

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte:									

Hinweise:

- Falls diese Leistung für Sie Prüfungsleistung ist, bearbeiten Sie alle Aufgaben 1–8; falls Studienleistung, nur die Aufgaben 1–6. Die erreichbaren Punktzahlen der Aufgaben 1–8 addieren sich auf 100. Sie haben 60 Minuten Zeit.
- Bücher, Notizen und elektronische Hilfsmittel sind bei dieser Klausur nicht erlaubt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Wahr oder falsch? (24 Punkte)

Kreuzen Sie W an, wenn die Aussage wahr ist und F, wenn die Aussage falsch ist. Ein richtig gesetztes Kreuz gibt 2 Punkte, kein Kreuz gibt 0 Punkte und ein falsch gesetztes Kreuz gibt -2 Punkte. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet. Sie brauchen keine Begründungen anzugeben.

- W F 0 kann Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems sein.
- W F Die Lösungsmenge der Gleichung $3x_1 + 4x_2 = 5$ ist ein Unterraum von \mathbb{R}^2 .
- F F Wenn die erste und zweite Spalte der 4×4 -Matrix B gleich sind, dann auch die erste und zweite Spalte von AB für jede 4×4 -Matrix A .
- W F Wenn die erste und zweite Spalte der 4×4 -Matrix B gleich sind, dann auch die erste und zweite Spalte von BA für jede 4×4 -Matrix A .
- F F Wenn v_1, \dots, v_n ein Erzeugendensystem des Vektorraums V ist und $w_1, \dots, w_m \in V$ linear unabhängig sind, dann ist $m \leq n$.
- W F Jede linear unabhängige Teilmenge eines Erzeugendensystems des Vektorraums V ist eine Basis von V .
- F F Jedes Erzeugendensystem des Vektorraums V hat eine linear unabhängige Teilmenge, die Basis von V ist.
- W F Jede linear unabhängige Menge in V hat eine Teilmenge, die Erzeugendensystem von V ist.
- F F Jede Basis ist linear unabhängig.
- F F Die Vektoren v_1, \dots, v_n sind linear abhängig, wenn ihre Summe der Nullvektor ist.
- W F Die Vektoren v_1, \dots, v_n sind nur dann linear abhängig, wenn ihre Summe der Nullvektor ist.
- F F Beim Vertauschen zweier Zeilen ändert die Determinante ihr Vorzeichen.

Aufgabe 2: Gauß-Verfahren (10 Punkte)

Benutzen Sie elementare Zeilenumformungen nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren, um die gegebene Matrix in allgemeine Zeilenstufenform zu bringen. Geben Sie jeweils im Kästchen an, welche Zeilenumformung Sie verwenden (z.B. $R_3 + 3R_2$ oder $R_1 \leftrightarrow R_3$). (Die Zahl der Schritte kann geringer sein als die der eingezeichneten Felder für Matrizen.)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 8 & 13 & 3 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{} \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{} \Rightarrow \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{} \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{} \Rightarrow \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{} \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{} \Rightarrow \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{} \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{} \Rightarrow \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{} \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\boxed{} \Rightarrow \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{} \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Kern und Bild (8 Punkte)

Für die Matrix A aus der vorigen Aufgabe:

(a) Welche der Variablen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 in der Gleichung $Ax = b$ sind die Pivot-Variablen, welche die freien Variablen? (Keine Begründung nötig.)

Pivot-Variablen: _____ freie Variablen: _____

(b) Bestimmen Sie (ohne Begründung):

$\text{Rang}(A) =$ _____ $\dim \text{Bild}(A) =$ _____ $\dim \text{Kern}(A) =$ _____

$\text{Rang}(A^T) =$ _____ $\dim \text{Bild}(A^T) =$ _____ $\dim \text{Kern}(A^T) =$ _____

Aufgabe 4: Erzeugendensystem (6 Punkte)

Formulieren Sie die Definition von "Erzeugendensystem". Eine Teilmenge $\{v_1, \dots, v_n\}$ eines \mathbb{K} -Vektorraums V heißt ein Erzeugendensystem von V , wenn folgendes gilt:

Aufgabe 5: Wahr oder falsch? (15 Punkte)

Wenn wahr, geben Sie eine Begründung; wenn falsch, geben Sie ein Gegenbeispiel.

- a) Wenn A eine 5×3 -Matrix ist und die Spalten von A linear unabhängig sind, dann ist $\text{Rang}(BA) = \text{Rang}(B)$ für jede 5×5 -Matrix B .
- b) $\det(S^{-1}AS) = \det A$ für alle $A, S \in M(n, \mathbb{K})$ mit invertierbarem S .
- c) Wenn A die Koeffizientenmatrix eines Systems von 3 linearen Gleichungen ist, das freie Variablen besitzt, dann hat die Gleichung $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung.

Aufgabe 6: Beweis (12 Punkte)

Seien V, W \mathbb{R} -Vektorräume, $L : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $w_i := L(v_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie: Wenn L injektiv ist, dann sind die Vektoren w_1, \dots, w_n linear unabhängig.

Aufgabe 7: Zeilenstufenform (13 Punkte)

Geben Sie eine vollständige Liste aller 2×3 -Matrizen A an, die alle der folgenden Eigenschaften haben:

- A hat allgemeine Zeilenstufenform.
- $\text{Rang}(A)=2$
- Alle Pivot-Einträge von A haben den Wert 4.

Schreiben Sie dabei " x " für jeden Eintrag von A , der beliebig sein kann.

Aufgabe 8: Determinanten berechnen (12 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Determinante. Geben Sie Ihren Rechenweg oder eine kurze Begründung an.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$(c) C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Platz für Notizen

Platz für Notizen

LINEARE ALGEBRA 1: TEILKLAUSUR/TEILTEST 2

Name:		
Diese Leistung ist	<input type="checkbox"/> Studienleistung	<input type="checkbox"/> Prüfungsleistung

Matrikelnummer:	Geburtsdatum:
-----------------	---------------

Aufgabe:	1	2	3	4	Σ
Punkte:					

Hinweise:

- Falls diese Leistung für Sie Prüfungsleistung ist, bearbeiten Sie alle Aufgaben 1-4; falls Studienleistung, nur die Aufgaben 1-3. Die erreichbaren Punktzahlen der Aufgaben 1-4 addieren sich auf 100, die von 1-3 auf 75. Sie haben 60 Minuten Zeit.
- Bücher, Notizen und elektronische Hilfsmittel sind bei dieser Klausur nicht erlaubt.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Wahr oder falsch? (24 Punkte)

Kreuzen Sie W an, wenn die Aussage wahr ist und F, wenn die Aussage falsch ist. Ein richtig gesetztes Kreuz gibt 2 Punkte, kein Kreuz gibt 0 Punkte und ein falsch gesetztes Kreuz gibt -2 Punkte. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet. Sie brauchen keine Begründungen anzugeben.

- W F Die Einheitsmatrix hat keine Eigenwerte.
- X F Bei einer Dreiecksmatrix sind die Eigenwerte gerade die Diagonaleinträge.
- W X Sei $S \in GL(n, \mathbb{R})$, D eine reelle $n \times n$ -Diagonalmatrix und $A = SDS^{-1}$. Dann ist A symmetrisch.
- X F Sei $S \in GL(n, \mathbb{R})$, D eine reelle $n \times n$ -Diagonalmatrix und $A = SDS^{-1}$. Dann besitzt A n linear unabhängige Eigenvektoren.
- X F Jede orthogonale Matrix ist invertierbar.
- W X Jede orthogonale Matrix hat positive Determinante.
- W X Jede orthogonale Matrix ist ihre eigene Inverse.
- X F Wenn S und R orthogonal sind, dann auch SR .
- W X Jede diagonalisierbare Matrix $A \in M(n, \mathbb{R})$ hat n verschiedene Eigenwerte.
- W X Seien $A, B \in M(2, \mathbb{R})$. Wenn λ ein Eigenwert von A ist und μ ein Eigenwert von B , dann ist $\lambda + \mu$ ein Eigenwert von $A + B$.
- X F Wenn A und B beide symmetrisch und positiv definit sind, dann auch $A + B$.
- X F Wenn $A \in M(n, \mathbb{C})$ und λ ein reeller Eigenwert von A ist, dann ist λ auch Eigenwert von A^* .

Aufgabe 2: Beweis (16 Punkte)

Es seien P und Q orthogonale Projektionen auf einem reellen Skalarproduktraum V , und es sei $R = PQ$. Zeigen Sie: Wenn $PQ = QP$, dann ist R eine orthogonale Projektion.

Aufgabe 3: (35 Punkte) Sei $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

- 12 (a) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in O(2)$, die A diagonalisiert, also so dass $S^{-1}AS$ diagonal ist.
- 2 (b) Wieviele verschiedene solcher Matrizen S gibt es? Geben Sie die exakte Anzahl an.
- 6 (c) Schreiben Sie A in der Spektralzerlegung, also

$$A = \sum_{i=1}^r \lambda_i P_i,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte sind und P_i die orthogonale Projektion auf den Eigenraum zu λ_i ist.

- 2 (d) Woran kann man sehen, dass A positiv definit ist?
- 2 (e) Drücken Sie \sqrt{A} , d.h. diejenige positiv semidefinite (= positive) Matrix mit $\sqrt{A}\sqrt{A} = A$, durch S , S^{-1} und eine Diagonalmatrix aus.
- 6 (f) Berechnen Sie e^{tA} für alle $t \in \mathbb{R}$. Geben Sie dabei die Einträge von e^{tA} explizit an, und benutzen Sie Ihre Ergebnisse von Teil (a).
- 5 (g) Lösen Sie die Differentialgleichung $\frac{du}{dt} = Au(t)$ mit der Anfangsbedingung $u(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Sei $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Für beliebiges $u \in \mathbb{R}^3$ seien u_{\parallel} und u_{\perp} die Anteile parallel und orthogonal zu v . Welche Bedingungs-Gleichungen müssen u_{\parallel} und u_{\perp} erfüllen? Bestimmen Sie daraus u_{\parallel} und u_{\perp} für allgemeines u .

(b) Wie lautet die Matrix P der orthogonalen Projektion auf die Gerade $g = \text{Span}(v)$, d.h. die $u_{\parallel} = Pu$ erfüllt?

(c) Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes $u = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ zur Geraden g .

Platz für Notizen