

Bearbeitungszeit: 2 Stunden

Aufgabe 1 (4 + 2 + 4 Punkte) Wir betrachten die zwei Mengen

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

- (a) Zeigen Sie, dass H und U Untergruppen von $GL_3(\mathbb{R})$ sind.
- (b) Zeigen Sie, dass U isomorph zu $(\mathbb{R}, +)$ ist.
- (c) Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler von H ist. Ist U ein Normalteiler von $GL_3(\mathbb{R})$?

Aufgabe 2 (4 + 3 + 3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. wir betrachten die Abbildung

$$\pi_n : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x], \quad \sum_{i=0}^n a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^n [a_i] x^i$$

- (a) Zeigen Sie dass π_n ein surjektives Ringhomomorphismus ist, und dass $\ker \pi_n = (n)$.
- (b) Zeigen Sie dass das Ideal $(n) \subseteq \mathbb{Z}[x]$ prim ist, genau dann, wenn $n = p$ eine Primzahl ist.
- (c) Zeigen Sie dass das Ideal $(n) \subseteq \mathbb{Z}[x]$ nie maximal ist.

Aufgabe 3 (2 + 3 + 5 Punkte) Seien R ein kommutativer Ring, und $I, J \subseteq R$ zwei Idealen. Wir definieren das Produktideal IJ als

$$IJ := (ij \mid i \in I, j \in J)$$

- (a) Zeigen Sie, dass $IJ \subseteq I \cap J$.
- (b) Geben Sie ein Beispiel an in dem $IJ \subsetneq I \cap J$ gilt.
- (c) Nehmen wir jetzt an, dass $I + J = R$. Zeigen Sie, dass $IJ = I \cap J$.

Nur für den Test der Lineare Algebra II

Aufgabe 4 (7 + 3 Punkte)

- (a) Seien V, W zwei K -Vektorräume. Seien $x_1, x_2 \in V$ linear unabhängige Vektoren und seien $y_1, y_2 \in W$ so gewählt, dass $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass $y_1 = y_2 = 0$.
- (b) Seien V ein K -Vektorraum, $v_1, \dots, v_5 \in V$ und $\alpha \in \wedge^3 V$ definiert als

$$\alpha := 2v_1 \wedge v_2 \wedge v_5 - 2v_2 \wedge v_4 \wedge v_5 - v_3 \wedge v_5 \wedge v_1 - v_4 \wedge v_3 \wedge v_5$$

Zeigen Sie, dass α zerlegbar ist.