

KLAUSUR ZUR LINEAREN ALGEBRA II

1.

Sei $\varphi : V \rightarrow V$ ein orthogonaler Endomorphismus des euklidischen Vektorraums V . Zeigen Sie, daß der Endomorphismus $\psi = \varphi + \varphi^{-1}$ selbstadjungiert ist.

(2 Punkte)

2.

Sei $\varphi : V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus des euklidischen Vektorraums V . Zeigen Sie, daß $(\text{Ker } \varphi)^\perp = \text{Im } \varphi$.

(2 Punkte)

3.

Bestimmen Sie das Maximum von $3x + 4y$, falls $x^2 + y^2 = 1$.

(2 Punkte)

4.

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^2$ mit Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$, in der die quadratische Form $q(x) = -7x_1^2 + 48x_1 x_2 + 7x_2^2$ diagonalisiert ist.

$$-7, 25$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 24 \\ 24 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$$

(3 Punkte)

$$-43 + 7\lambda - 7\lambda + \lambda^2$$

$$\lambda^2 - 625$$

$$(-7 - \lambda)(7 - \lambda) = 576$$

$$(-7 - \lambda)(7 - \lambda) = 576 - 576$$

$$-(-7 - \lambda)(7 - \lambda) = 576$$

5.

Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ gilt

$$5x_1^2 + 2x_1 x_2 + 5x_2^2 > \lambda(x_1^2 + x_2^2).$$

$$(5 - \lambda)x_1^2 + 2x_1 x_2 + (5 - \lambda)x_2^2$$

(2 Punkte)

$$\begin{pmatrix} 18 & 24 \\ 24 & 32 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

6.

Sei $q : V \rightarrow \mathbb{Q}$ eine quadratische Form auf einem $\mathbb{Q}$ -Vektorraum V . Zeige: Ist B (bzw. B') die Matrix von q in einer Basis $e_1, \dots, e_n$ (bzw. Basis $e'_1, \dots, e'_n$) und $|B| \neq 0$, so ist

$$\sqrt{\frac{|B'|}{|B|}}$$

eine rationale Zahl.

(2 Punkte)

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 0 & (5 - \lambda)^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 0 & (5 - \lambda)^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 \\ 0 & -(5 - \lambda)^2 \end{pmatrix}$$

$$(5 - \lambda) > 0$$

$$-(5 - \lambda)^2 > 0$$

$$-25 + 10\lambda - \lambda^2 > 0$$

$$\frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 25}}{-2} = \frac{-10 \pm 0}{-2} = 5$$

$$\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{9} + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$\rho_1 = \frac{3}{5} \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{4}{5}$$

$$x_1 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 = 1$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.

Geben Sie ein Beispiel eines normalen Endomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^2$ an, der nicht orthogonal und nicht selbstadjungiert ist.

(2 Punkte)

8.

Sei $\mathbb{C}^2$ der unitäre Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$. Orthonormalisieren Sie das System von Vektoren:

$$v_1 = (2 + 2i, 2 - 2i); \quad v_2 = (8 + 4i, 4 - i).$$

$$\langle 2-2i, 2-2i \rangle + \langle 2-2i, 2+2i \rangle$$



(2 Punkte)

9.

Geben Sie ein Beispiel eines selbstadjungierten Endomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an, dessen Matrix in einer Basis des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^2$ nicht symmetrisch ist.

(3 Punkte)

10.

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein bijektiver selbstadjungierter Endomorphismus des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß

$$\|\varphi\| = \|\varphi^{-1}\| \Leftrightarrow \det(\varphi) \in \{1, -1\}.$$

(3 Punkte)

11.

Sei $\varphi : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus des euklidischen Vektorraums V mit $\varphi = -\varphi^*$. Zeigen Sie, daß die Determinante von φ nicht negativ ist.

(3 Punkte)

12.

Sei $\mathbb{C}^2$ der unitäre Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$. Zeigen Sie, daß die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$$

(bzgl. der Standardbasis) selbstadjungiert ist. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis, in der φ diagonalisiert ist.

(3 Punkte)

KLAUSUR ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Lösungsskizzen

1.

Da φ orthogonal ist, gilt $\varphi^{-1} = \varphi^*$. Daraus folgt $\psi^* = (\varphi + \varphi^{-1})^* = (\varphi + \varphi^*)^* = \varphi^* + \varphi = \varphi^{-1} + \varphi = \psi$. Also ist ψ selbstadjungiert. $\square$

2.

Als selbstadjungierter Endomorphismus ist φ in einer Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_n)$ diagonalisierbar, d. h. es ist $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von φ sind. Aus $\text{Ker}(\varphi) = \text{Span}\{e_i : \lambda_i = 0\}$ und $\text{Im}(\varphi) = \text{Span}\{e_i : \lambda_i \neq 0\}$ folgt die Behauptung. $\square$

3.

Durch Anwenden der Ungleichung von Cauchy-Schwarz auf die Vektoren $(3, 4)$ und (x, y) erhält man die Abschätzung $3x + 4y \leq \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = 5$. Da der Wert 5 (für $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{5}$) angenommen wird, ist er das gesuchte Maximum. $\square$

4.

Die Matrix von q hat die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm 25$. Als zugehörige normierte Eigenvektoren erhält man $e_1 = \frac{1}{5}(3, 4)$ und $e_2 = \frac{1}{5}(4, -3)$. Diese bilden die gesuchte Orthonormalbasis. $\square$

5.

Gesucht werden alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die die quadratische Form $(5 - \lambda)x_1^2 + 2x_1x_2 + (5 - \lambda)x_2^2$ positiv definit ist. Aus dem Hauptminorenkriterium ergeben sich die Ungleichungen $5 - \lambda > 0$ und $(5 - \lambda)^2 - 1 > 0$. Insgesamt erhält man $\lambda < 4$. $\square$

6.

Sei T die Transformationsmatrix zwischen den Basen $(e_1, \dots, e_n)$ und $(e'_1, \dots, e'_n)$. Dann ist $|B'| = |{}^t T B T| = |T|^2 |B|$ und damit $\sqrt{\frac{|B'|}{|B|}} = \sqrt{|T|^2} = \pm |T| \in \mathbb{Q}$. $\square$

7.

Als Matrix von φ (bzgl. der Standardbasis) wählen wir ein echtes Vielfaches einer Drehmatrix (mit Drehwinkel $\notin \{0, \pi\}$), also eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 \neq 1$ und $b \neq 0$. $\square$

8.

Das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren funktioniert auch in unitären Vektorräumen. Man erhält $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{2}(1 + i, 1 - i)$, $w_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = \frac{7}{2}(1, i)$, $e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)$. $\square$

9.

Als Matrix von φ bzgl. der Standardbasis wählen wir z. B. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Durch Basiswechsel mit der Transformationsmatrix $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ ergibt sich $A' = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\square$

10.

Da φ selbstadjungiert ist, existiert eine Orthonormalbasis, in der die Matrix von φ die Form $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ hat. Dabei sind $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ (φ ist bijektiv!); o. B. d. A. sei $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$. Es gilt $A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} \end{pmatrix}$; $\|\varphi\| = |\lambda_1|$, $\|\varphi^{-1}\| = |\lambda_2^{-1}|$. Folglich gilt $\|\varphi\| = \|\varphi^{-1}\|$ genau dann, wenn $|\lambda_1| = |\lambda_2^{-1}|$, also $1 = |\lambda_1 \lambda_2| = |\text{Det}(\varphi)|$ ist. $\square$

11.

Nach Übungsaufgabe 38 gibt es eine Orthonormalbasis, in der die Matrix von φ die Blockdiagonalgestalt $A = \text{Diag}(A_1, \dots, A_k)$ hat, wobei jeder Block A_i eine Nullmatrix oder eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} \beta_i & -\beta_i \\ \beta_i & 0 \end{pmatrix}$ ist. Für $i = 1, \dots, k$ gilt folglich $|A_i| = 0$ oder $|A_i| = \beta_i^2 \geq 0$. Wegen $|A| = \prod_{i=1}^k |A_i|$ ist damit auch die Determinante von φ nicht negativ. $\square$

12.

Wegen ${}^t \bar{A} = A$ ist φ selbstadjungiert. Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 8$. Als zugehörige normierte Eigenvektoren erhält man $e_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-5, 2 + i)$ und $e_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(2 - i, 5)$. Diese bilden die gesuchte Orthonormalbasis. $\square$

TEST-KLAUSUR ZUR LINEAREN ALGEBRA II**1.**Sei $V := M(2 \times 2; \mathbb{R})$ und $q : V \rightarrow \mathbb{R}$:

$$q(A) := \det(A), \quad \forall A \in V.$$

Zeigen Sie, daß q eine quadratische Form auf V ist. Bestimmen Sie die Matrix von q in der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.Sei f die bilineare Form mit der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, daß die quadratische Form $q(v) := f(v, v)$ positiv definit ist.

3.

Bestimmen Sie die positiven und negativen Indizes der quadratischen Form

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - \frac{1}{n+1}(x_1 + \cdots + x_n)^2.$$

4.

Sei $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine quadratische Form und $U \subset V$ ein Unterraum mit $\dim U > \frac{1}{2} \dim V$, so daß gilt $q(v) = 0 \quad \forall v \in U$. Zeigen Sie, daß die Determinante der Matrix der quadratischen Form q gleich Null ist.

5.Zeigen Sie, daß für Vektoren $v_1, \dots, v_k$ in einem euklidischen Vektorraum V gilt:

$$G(v_1, \dots, v_k) \leq \|v_1\| \cdots \|v_k\|,$$

wobei $G(v_1, \dots, v_k)$ die Gramsche Determinante ist.

6.

Bestimmen Sie den Winkel zwischen dem Vektor $v = (2, 2, 1, 1)$ und dem Unterraum

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0\}.$$

7.

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Drehung mit dem Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$. Zeige: Besitzt φ in einer Basis $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ eine 2×2 -Matrix A mit Einträgen nur aus $\mathbb{Z}$, so gilt

$$\alpha \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\}.$$

8.

Seien U_1, U_2 zwei beliebige Unterräume eines euklidischen Vektorraums V . Zeigen Sie, daß es gilt

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp.$$

9.

Sei n eine beliebige positive ganze Zahl. Zeigen Sie, daß es einen orthogonalen Endomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit dem charakteristischen Polynom $\pm(t^n - 1)$.

10.

Bestimmen Sie die Darstellung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

als Produkt $A = O \cdot D$, wobei O eine orthogonale Matrix und D eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Einträgen auf der Hauptdiagonale ist.

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Lösungen zur Probeklausur

1. Zu zeigen ist: Durch die Polarisierung $f(A, B) = \frac{1}{2}(q(A+B) - q(A) - q(B))$ mit $A, B \in V$ ist eine symmetrische Bilinearform auf V gegeben. Es gilt $f(A, B) = \frac{1}{2}(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12})$. Bezüglich der angegebenen Basis ist q gegeben durch die Matrix $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

2. Die Bilinearform lautet $q(X_1, X_2) = X_1^2 + \lambda X_1 X_2 + X_2^2$. Satz 2.11 läßt sich nur auf symmetrische Matrizen anwenden, d.h. man muß die Matrix $B' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & 1 \end{pmatrix}$ betrachten. Nun gilt: $\det B' > 0 \Leftrightarrow |\lambda| < 2$. $\square$

3. Nach Übungsaufgabe 3 gilt für $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$: $x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)^2 > \frac{1}{n+1}(x_1 + \dots + x_n)^2$. Daraus folgt, daß die quadratische Form positiv definit ist und somit positiven Index n und negativen Index 0 hat. $\square$

4. Sei $\dim V = n, \dim U = k$. Man ergänzt eine Basis von U zu einer von V . Bezüglich dieser hat die $n \times n$ -Matrix A der quadratischen Form links oben einen $k \times k$ -großen Nullblock, d.h. für $1 \leq i, j \leq k$ gilt $a_{ij} = 0$. Für die Determinante gilt $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$. Da jedes $\sigma \in S_n$ eine Bijektion ist und $k > \frac{n}{2}$, existiert stets ein $1 \leq i \leq k$, so daß $\sigma(i) \leq k$, also $a_{i, \sigma(i)} = 0$ ist. Daher verschwindet jeder Summand in obiger Summe. $\square$

5. Beweis durch Induktion über k . Induktionsanfang für $k = 1$ ist klar. Induktionsschritt $k-1 \rightarrow k$: Setze $U := \text{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$ und schreibe $v_k = v'_k + u$ mit $u = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i v_i \in U$ und $v'_k \in U^\perp$. Durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen (Subtraktion des λ_i -fachen der i -ten Zeile/Spalte von der letzten) findet man $G(v_1, \dots, v_k) = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_{k-1}, v_1 \rangle & \dots & \langle v_{k-1}, v_k \rangle \\ 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_{k-1} \rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle v_{k-1}, v_1 \rangle & \dots & \langle v_{k-1}, v_{k-1} \rangle & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \langle v'_k, v'_k \rangle \end{vmatrix} = G(v_1, \dots, v_{k-1}) \|v'_k\|^2 \leq \|v_1\|^2 \dots \|v_{k-1}\|^2 \cdot \|v_k\|^2$, denn es gilt $\|v_k\|^2 = \|v'_k\|^2 + \|u\|^2$. $\square$

6. Am einfachsten berechnet man den Winkel zwischen v und dem Normalenvektor zur Hyperebene U . $U^\perp = \mathbb{R}u$ mit $u = (1, 1, 2, 2)^t$. Dann gilt $\cos \alpha = \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\| \cdot \|u\|} = \frac{8}{10}$. Der Winkel zwischen U und v ist daher $\frac{\pi}{2} - \arccos(\frac{4}{5})$. $\square$

7. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ sei die Matrix von φ bezüglich der Basis $\{e_1, e_2\}$. Es gibt eine Basis $\{e'_1, e'_2\}$ bezüglich der φ die Gestalt $A' = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ hat. A und A' besitzen dasselbe charakteristische Polynom $t^2 - 2 \cos \alpha t + 1 = t^2 - (a_{11} + a_{22})t + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$. Da die Spur $a_{11} + a_{22} = 2 \cos \alpha$ nach Voraussetzung ganzzahlig ist, muß $2 \cos \alpha \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ gelten, also $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\}$. $\square$

8. Aus Aufgabe 17 ist bekannt, daß für beliebige Unterräume $V_1, V_2 \subseteq V$ gilt: $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$. Mit $V_1 = U_1^\perp, V_2 = U_2^\perp$ gilt $(U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp = (U_1^\perp)^\perp \cap (U_2^\perp)^\perp = U_1 \cap U_2$. Dies ist äquivalent zu $U_1^\perp + U_2^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp$, was zu zeigen war. $\square$

9. Unter Verwendung von Aufgabe 56 (Wintersemester) findet man die $n \times n$ -Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Diese hat das charakteristische Polynom $\pm(t^n - 1)$ und ist orthogonal, da die Spalten eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden. φ habe bezüglich einer beliebigen Basis die Matrix A , dann ist φ ein Endomorphismus mit den gewünschten Eigenschaften. $\square$

10. Die Zerlegung erhält man durch Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens auf die Spalten von A . Dabei sei $v_1 = (1, 3)^t, v_2 = (2, 4)^t$. So gilt $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)^t, w_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = (2, 4)^t - \langle \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)^t, (2, 4)^t \rangle \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)^t = (\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})^t, e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)^t$. Für die orthogonale Matrix gilt $O = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Die Koordinaten von v_1 und v_2 in der Orthonormalbasis $\{e_1, e_2\}$ sind $(\sqrt{10}, 0)$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{10}}(14, 2)$. Daher hat D die Form $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\square$