

Klausuraufgaben

Dienstag, 26. September 2023

10:09

- Beh: Jede Cauchyfolge ist beschränkt

Bew: Sei x eine Cauchyfolge,

$\varepsilon = 1$ und n_1 so, dass $|x_n - x_m| < 1$ für $m, n \geq n_1$. Dann gilt für $n \geq n_1$

$$|x_n| = |x_n - x_{n_1} + x_{n_1}| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}|, \text{ also}$$

$$|x_n| \leq \max \{ |x_1|, \dots, |x_{n_1-1}|, 1 + |x_{n_1}| \}. \quad \square$$

- Behauptung: Jede konvergente Folge ist Cauchy

Bew: Sei $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass $|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_\varepsilon$, dann gilt für alle $n, m \geq n_\varepsilon$

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \varepsilon$$

- Koeffizienten einer Taylorreihe bestimmen zum Entwicklungspunkt Null

(konstanter Faktor vor veränderlicher Größe)

$$\text{Für } g(x) = \frac{1}{2-3x}$$

$$g(x) = \frac{1}{2-3x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{2}x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}x\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot x^n \Rightarrow \text{Koeffizient: } \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Konvergenzradius davon:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|}} \quad \rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{3}{2}\right)^n\right|}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

- Taylorpolynom 3. Ordnung von $f(x) = e^{x^2}$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$

$$f(x) = e^{x^2} \quad f(1) = e^1 = e$$

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x \quad f'(1) = e \cdot 2 = 2e$$

$$f''(x) = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2} \cdot 2 = e^{x^2} \cdot 4x^2 + e^{x^2} \cdot 2 \quad f''(1) = 4e + 2e = 6e$$

$$f'''(x) = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 4x^2 + e^{x^2} \cdot 8x + e^{x^2} \cdot 4x = e^{x^2} \cdot 8x^3 + e^{x^2} \cdot 8x + e^{x^2} \cdot 4x \quad f'''(1) = 8e + 8e + 4e = 20e$$

$$\sum_{n=0}^3 \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad P_{f, x_0}^{(3)} = e + \frac{2e}{1} (x-x_0) + \frac{6e}{2} (x-x_0)^2 + \frac{20e}{6} (x-x_0)^3$$

- Kurzfragen: > Ist Abbildung $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv? $\rightarrow$ Ja
> $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ nicht injektiv

> Abbildung $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ surjektiv? $\rightarrow$ Nein

> $f \circ g$ ist bijektiv. Dann ist f injektiv $\rightarrow$ Nein, f surjektiv & g injektiv

> monotone Folge in $[0,1]$ konvergiert $\rightarrow$ Ja

> Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert $\rightarrow$ Nein, hat nur eine kvgt. Teilfolge

> Jede Cauchy Folge in $\mathbb{Q}$ ist konvergent $\rightarrow$ Ja

> $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent. Zumindest eine der TF $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ & $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\rightarrow$ falsch

> $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \rightarrow$ Ja

> $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 \rightarrow$ falsch

> $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2(x)/x^2 = 1 \rightarrow$ falsch (haut nach oben ab, da $1/\text{fast } 0$ sehr groß ist)

> Konvergente Reihe mit nur positiven Gliedern auch absolut konvergent $\rightarrow$ Ja

> Partialsummenfolge einer absolut konvergenten Reihe ist beschränkt $\rightarrow$ Ja

> Partialsummenfolge einer konvergenten Reihe ist beschränkt $\rightarrow$ Ja

> Wert einer konvergenten Reihe ändert sich nicht bei Umordnung $\rightarrow$ Nein

$f: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$

> f s.m., dann hat f nur eine Nullstelle $\rightarrow$ Ja

> f ist differenzierbar, dann ist f stetig $\rightarrow$ Ja

> f ist stetig, dann ist f beschränkt $\rightarrow$ Nein

Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind s.m.w.. Die diff. baren Funktionen (f_n) konvergieren gleichmäßig gegen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (oder so ähnlich)

- > f ist differenzierbar $\rightarrow$ Nein
- > Falls alle f_n beschränkt, so ist auch f beschränkt $\rightarrow$ Ja
- > Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die reelle Folge a_n mit $a_n = f_n(x)$ m.w. $\rightarrow ?$
- > Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die reelle Folge b_m mit $b_m = f_n(m)$ m.w. $\rightarrow ?$

Def: Mittelwertsatz:

Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und in (a, b) differenzierbar, so gibt es mind. ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Steigung der Tangente bei x_0 = Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ & $(b, f(b))$

Def: Mittelwertsatz:

Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und in (a, b) differenzierbar, so gibt es mind. ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Steigung der Tangente bei x_0 = Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ & $(b, f(b))$

Def.: Differenzierbarkeit

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ heißt im Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert.}$$

Dann heißt $f'(x_0)$ die Ableitung von f an der Stelle x_0 . Man schreibt:

$$\frac{d}{dx} f(x_0) \text{ oder } \frac{df}{dx}(x_0) \text{ oder } \left. \frac{df}{dx}(x) \right|_{x=x_0}$$

Extremwertbestimmung: Verhältnis a & b , bei gegebenem Volumen & minimale Oberfläche

geg.: Fläche Dreieck: $\frac{\sqrt{3}}{4} b^2$ Volumen: $\frac{\sqrt{3}}{4} b^2 \cdot a \Leftrightarrow a = \frac{V}{b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}}$ $F = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} b^2 \cdot 3ab = \frac{\sqrt{3}}{2} b^2 \cdot 3ab$

$$F(b) = \frac{\sqrt{3}}{2} b^2 \cdot 3 \cdot \frac{V}{b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3V \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{3V}{2} \cdot 4 = 6V$$

$$F'(b) = 6V \quad F'(b) = 0 \quad 6V = 0 \Leftrightarrow 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} b^2 \cdot a \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 \cdot a = 0 \Leftrightarrow b^2 \cdot a = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3\sqrt{3}b^2}$$

Lokales Maximum

> Definition: $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ hat bei $x_0 \in I$ ein lokales Maximum, falls: $\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(x_0) \cap I: f(x) \leq f(x_0)$

> z.z. Falls f bei x_0 lokales Maximum hat, so gilt: $f'(x_0) = 0$

Bew.: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ bei Minimum ≥ 0 für $x < x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad \square$$

> Wiederlege aus $f'(x) = 0$ folgt, das f bei x_0 lokales Maximum hat

Bsp.: $f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x \quad$ Nullstelle bei $x_0 = 0 \rightarrow f'(0) = 0$

Hinreichendes Kriterium für lokales Maximum auch: $f''(x_0) < 0$

$$f''(x) = 2 \quad 2 > 0 \quad \square$$

Ableitungen:

$$f(x) = \sin(e^x) \cdot \cos(e^x) \quad f'(x) = \cos(e^x) \cdot e^x \cdot \cos(e^x) + \sin(e^x) \cdot (-\sin(e^x)) \cdot e^x = \cos^2(e^x) \cdot e^x - \sin^2(e^x) \cdot e^x$$

$$f(x) = x^{\sqrt{x}} = e^{\ln(x) \cdot \sqrt{x}} \quad f'(x) = e^{\ln(x) \cdot \sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{x} \sqrt{x} + \ln(x) \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) = x^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \ln(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = x^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} \right)$$

- Folgen auf Konvergenz überprüfen
(Für welches a konvergiert die Summe?)

$$> \sum_{n=1}^{\infty} (n^{-a} + n^{a-3}) \quad > \sum_{n=1}^{\infty} \sin(a)^n$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin(a)^n \quad |\sin(a)| < 1, \text{ damit Reihe kvgt. } \Rightarrow \underline{\text{Geometrische Reihe}}$$

Also kann a alle Werte außer $\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ annehmen $n \in \mathbb{Z}$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n^{-a} + n^{a-3}) \quad \left. \begin{array}{l} > n^{-a} \text{ konvergiert für } a > 1 \\ > n^{a-3} \text{ konvergiert für } a < 3 \end{array} \right\} \text{ kombinieren}$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert für $a \in (1, 3)$