

Hausen AGS SoSe26 Klausurenprotokoll

Lorenz Reißle

June 2026

Teil A

Zutreffendes bitte jeweils ankreuzen $\boxtimes$. Eine Begründung ist nicht erforderlich. Die maximale Punktzahl für Teil A ist 32. Liegen mehr richtig als falsch gesetzte Kreuze vor, so errechnet sich die Punktzahl für Teil A als

Anzahl der richtig gesetzten Kreuze minus Anzahl der falsch gesetzten Kreuze.
Andernfalls wird Teil A mit 0 Punkten bewertet. Jede Aufgabe wird in sich bewertet

Aufgabe 1. Diese Aussage ist richtig falsch

Jede Untergruppe $H \subseteq S_3$ mit $H \neq S_3$ ist abelsch ☐ ☐

Jede Gruppe der Ordnung 8 besitzt ein Element der Ordnung 8 ☐ ☐

Jede Untergruppe von S_3 ist ein Normalteiler von S_3 ☐ ☐

Es gibt einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ☐ ☐

Es gibt einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ☐ ☐

Ist G eine abelsche Gruppe, so ist jede Untergruppe von G abelsch ☐ ☐

Ist G eine abelsche Gruppe, so ist jede Faktorgruppe von G abelsch ... ☐ ☐

Jede Gruppe der Ordnung 19 besitzt genau zwei Untergruppen ☐ ☐

Jede Gruppe der Ordnung 21 besitzt genau zwei Untergruppen ☐ ☐

Aufgabe 2. Diese Aussage ist	richtig	falsch
Für je zwei $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ ist $\mathbb{Z}[a_1, a_2] \subseteq \mathbb{C}$ ein Integritätsring	☐	☐
Für je zwei Einheiten $f, g \in \mathbb{R}[T]$ ist $f + g \in \mathbb{R}[T]$ eine Einheit	☐	☐
Ist R ein Integritätsring, so ist auch jeder Faktoring von R ein Integritätsring	☐	☐
Die Ringe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$ sind isomorph zueinander	☐	☐
Die Ringe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ sind isomorph zueinander	☐	☐
Der Ring $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ besitzt genau 10 Einheiten	☐	☐
Der Polynomring $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})[T]$ besitzt genau 12 Einheiten	☐	☐

Aufgabe 3. Diese Aussage ist	richtig	falsch
Sind $f, g \in \mathbb{Q}$ assoziiert zueinander, so besitzen f und g denselben Grad	☐	☐
Ist R ein Integritätsring, so ist jedes irreduzible Element $q \in R$ prim ...	☐	☐
In $\mathbb{R}[T]$ ist jedes irreduzible Element prim	☐	☐
Das Polynom $T^3 + 1 \in \mathbb{Q}[T]$ ist ein Primelement in $\mathbb{Q}[T]$	☐	☐
Das Polynom $T^2 + T + 1 \in \mathbb{Q}[T]$ ist ein Primelement in $\mathbb{Q}[T]$	☐	☐
Zu je drei $f, g, h \in \mathbb{C}[T]$ gibt es ein Polynom $q \in \mathbb{C}[T]$ mit $\langle f, g, h \rangle = \langle q \rangle$	☐	☐
Das von $2i - 3$ und $i + 5$ in $\mathbb{Z}[i]$ erzeugte Ideal ist ein Hauptideal	☐	☐
Für die Ideale $\mathfrak{a} := \langle 4 \rangle$ und $\mathfrak{a} := \langle 8 \rangle$ in $\mathbb{Z}$ gilt $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \langle 12 \rangle$	☐	☐
Für die Ideale $\mathfrak{a} := \langle 4 \rangle$ und $\mathfrak{a} := \langle 8 \rangle$ in $\mathbb{Z}$ gilt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \langle 4 \rangle$	☐	☐

Aufgabe 4. Diese Aussage ist	richtig	falsch
Es gibt eine linear unabhängige Familie (v_1, v_2) in $\mathbb{Z}^2$, sodass $v_1 = (2, 2)$ gilt	☐	☐
Es gibt ein Erzeugendensystem (v_1, v_2) für $\mathbb{Z}^2$, sodass $v_1 = (2, 2)$ gilt ...	☐	☐
Es gibt eine Basis (v_1, v_2) von $\mathbb{Z}^2$, sodass $v_1 = (2, 2)$ gilt	☐	☐
Gilt $\det(A) = T$ für $A \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q}[T])$, so ist A invertierbar über $\mathbb{Q}[T]$	☐	☐
Jeder endlich erzeugte $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ -Modul ist frei	☐	☐
Jeder freie $\mathbb{Q}[T]$ - Modul vom Rang 9 ist isomorph zu $\mathbb{Q}[T]^9$	☐	☐
Der $\mathbb{Z}$ -Modul $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist frei	☐	☐
Ist $A \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Q})$ vom Rang 2 und besitzt A den Eigenwert 1, so ist A diagonalisierbar	☐	☐

Teil B

Bitte für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden.

Auf jedem Blatt oben rechts Namen angeben

Es werden nur Punkte für das richtige Ergebnis vergeben und nicht für den Rechenweg

Die maximale Punktzahl für Teil B ist 24

Aufgabe 5. (4 Punkte) Betrachte die folgende Matrix $A, B \in \text{Mat}(2, 2; \mathbb{Q}[T])$

$$A = \begin{pmatrix} T & 5 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} T^2 & T-1 \\ T+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Prüfe auf Invertierbarkeit richtig falsch

Ist A invertierbar über $\mathbb{Q}[T]$ ☐ ☐

Ist B invertierbar über $\mathbb{Q}[T]$ ☐ ☐

Falls Invertierbarkeit vorliegt, gib die Inverse Matrix an

$$A^{-1} = \boxed{} \quad B^{-1} = \boxed{}$$

Aufgabe 6. (4 Punkte) Bestimme Polynome $q, r \in \mathbb{Q}[T]$ mit $f = qg + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$, wobei

$$f = T^4 - T^3 + T^2 - 2$$

$$g = T^2 - T$$

$$q =$$

$$q =$$

Aufgabe 7. (4 Punkte) Bestimme einen größten gemeinsamen Teiler $h \in \mathbb{Q}[T]$ für die beiden folgenden Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[T]$

$$f = T^4 - 2T^3 + 4T^2 - 5T + 6$$

$$g = T^3 - 3T + 2$$

$$h =$$

Aufgabe 8. (4 Punkte) Bestimme die Hermite-Normalform und die Smith-Normalform der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3, 3; \mathbb{Z})$$

Hermite

Smith

Aufgabe 9. (3 Punkte) Bestimme Elementarteiler, primäre Elementarteiler und die Länge für den $\mathbb{Z}$ -Modul $M := \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$

Elementarteiler:

Länge $l =$

primäre Elementarteiler:

Aufgabe 10. (3 Punkte) Bei dieser Aufgabe muss die richtige Anzahl in das dafür vorgesehene Kästchen geschrieben werden. Pro richtige Antwort gibt es 1 Punkt.

Es gibt bis auf Isomorphie genau abelsche Gruppen der Ordnung 31

Es gibt bis auf Isomorphie genau abelsche Gruppen der Ordnung 32

Es gibt bis auf Isomorphie genau abelsche Gruppen der Ordnung 33