

Aufgabe 1 (9 Punkte): Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden reellen linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ (geben Sie jeweils eine Parametrisierung der Lösungsmenge und eine Darstellung der Form $v_0 + \langle B \rangle$ mit einer Basis B des zugehörigen Unterraums an):

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\ty + z &= 1 \\tx + ty + z &= 1 + t\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte): Begründen Sie jeweils:

(a) Bei welchen der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ handelt es sich um Unterräume?

$$U_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}, \checkmark$$

$$U_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}, \checkmark$$

$$U_5 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 = 1\}. \times$$

$$U_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1\}, \times$$

$$U_4 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 = 0\}, \checkmark$$

(b) Ist $U := \{f \mid f(1) = 2 \cdot f(0)\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Abbildung}\}$ ein Unterraum?

Aufgabe 3 (8 Punkte):

Sei $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 mit Basis $B = (1, x, x^2, x^3)$. Bezeichne f' die Ableitung eines Polynoms f und f'' die zweite Ableitung. Wir definieren eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} &\longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \\f &\longmapsto f' + 2f''.\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_B M_B(\varphi)$.

(b) Bestimmen Sie die Dimensionen $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Ker}(\varphi))$ und $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Im}(\varphi))$.

Aufgabe 4 (7 Punkte):

Sei $B = \{(-1, 1, 0, 0), (-1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^4$.

(a) Zeigen Sie, die Vektoren in B sind linear unabhängig.

(b) Verwenden Sie das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt, um aus B eine Orthonormalbasis für den von B erzeugten Unterraum bezüglich des Standardskalarprodukts des $\mathbb{R}^4$ herzustellen.

Aufgabe 5 (9 Punkte):

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix T , so dass $T \cdot A \cdot T^{-1}$ Diagonalgestalt hat für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A = -(x-1)^2(x-3)$.

Aufgabe 6 (4 Punkte):

Sei $A \in \text{Mat}(3, \mathbb{R})$ eine reelle 3×3 -Matrix, deren charakteristisches Polynom $\chi_A = -(x-2)^3$ ist und deren Minimalpolynom $\mu_A = (x-2)^2$ ist. Geben Sie die Jordannormalform von A an.

Aufgabe 7 (6 Punkte):

Sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3, \mathbb{R})$$

jeweils diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

Aufgabe 8 (7 Punkte):

Sei V ein Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subset V$ jeweils Untervektorräume von V . Zeigen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Untervektorraum von V ist, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt.