

Aufgabe 1: Topologische, metrische und normierte Räume (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen gültig sind (☒W), oder nicht (☐F).

✓ ☒W ☒F Es gilt $d(x, y) \geq d(x, z)$ für alle $x, y, z \in X$ mit $x \neq y$.

✓ ☒W ☐F Es gilt $d(x, x) = 0$ für alle $x \in X$.

☐W ☐F Die Funktion $x \mapsto d(x, 0)$ definiert eine Norm auf X .

✓ ☒W ☐F Die Kollektion $\{X, \emptyset\}$ definiert eine Topologie auf X .

3

Aufgabe 2: Offene und abgeschlossene Mengen (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $A, B \subset X$. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen gültig sind (☒W), oder nicht (☐F).

✓ ☒W ☐F $\bar{A}$ ist abgeschlossen.

✓ ☒W ☐F A ist offen $\Leftrightarrow A^c$ ist abgeschlossen.

✓ ☐W ☒F $\bar{A}$ ist offen $\Leftrightarrow A = X$.

✓ ☐W ☒F $A \subseteq A^\circ$.

u

Aufgabe 3: Differenzierbare Funktionen (4 Punkte)

Betrachte $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Implikationen gültig sind (☒W), oder nicht (☐F).

✓ ☐W ☒F f ist stetig $\Rightarrow f$ ist stetig partiell differenzierbar.

✓ ☐W ☒F f ist partiell differenzierbar $\Rightarrow \nabla f$ ist stetig.

✓ ☒W ☐F f ist stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow f$ ist lokal Lipschitz-stetig.

✓ ☒W ☐F f ist eine Kontraktion $\Rightarrow f$ ist Lipschitz stetig.

u

Aufgabe 4: Normen auf $\mathbb{R}^n$ (1+1+1+1 Punkte)

Betrachten Sie $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$.

- (a) Definieren Sie auf $\mathbb{R}^n$ die euklidische Norm und eine weitere Norm.
- (b) Definieren Sie die Äquivalenz zweier Normen auf $\mathbb{R}^n$.
- (c) Zeigen Sie, dass die zwei Normen aus (a) äquivalent sind.
- (d) Formulieren Sie den Satz von Heine-Borel.

Aufgabe 5: Ableitungen und Diffeomorphismen (2+1 Punkte) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ eine Funktion mit

$$Df|_{(-1,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ferner sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $(x, y) \mapsto g(x, y) = (e^x y, xy^3)$.

Berechnen Sie $D(f \circ g)|_{(0,-1)}$.

Ist $f \circ g$ bei $(0, -1)$ ein lokaler Diffeomorphismus?

Aufgabe 6: Taylorpolynom (5 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \sin(x)y^{-3}.$$

Finden Sie ein Polynom zweiten Grades, $P^{(2)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt

$$f(h_x, 1 + h_y) - P^{(2)}(h_x, h_y) = o(h^2).$$

Aufgabe 7: Lokale Extrema (2+1+4 Punkte)

Sei $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ und

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = xe^{-y}.$$

- (a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrema der Funktion f .
- (b) Zeigen Sie, dass $f|_S$ sein globales Maximum annimmt.
- (c) Bestimmen Sie das globale Maximum von $f|_S$.

Aufgabe 8: Lineare DGL (2+4 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie den Lösungsraum der folgenden homogenen lineare Differentialgleichung.

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma \quad \text{mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

- (b) Bestimmen Sie den Lösungsraum der folgenden inhomogenen lineare Differentialgleichung.

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 9: Lösungen von DGLs schneiden sich nicht (5 Punkte)

Gegeben sei eine stetige Funktion

$$v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto v(x, t)$$

die eine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\gamma' = \overset{v}{f}(t, \gamma)$$

Für $a < b$, seien $\gamma_a, \gamma_b \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die eindeutigen maximalen Lösungen zu den Anfangswerten

$$\gamma_a(0) = a, \quad \gamma_b(0) = b.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\gamma_a(t) < \gamma_b(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Achten Sie auf eine präzise, vollständige und nachvollziehbare Argumentation.

Hinweis: Nehmen Sie widerspruchshalber an, es existiert ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\gamma_a(t) = \gamma_b(t)$.