

Aufgabe 1: Topologische Räume (4 Punkte) 3

Sei X ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen gültig sind (☒ W), oder nicht (☐ F).

☒ ☐ $(\bar{Y})^c = (Y^c)^\circ$ ✓

☐ ☒ $\bar{Y} \subset Y \subset Y^\circ$ ✓

☐ ☒ Y ist zusammenhängend genau dann, wenn Y wegzusammenhängend ist. ✓

☐ ☐ Wenn $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist, dann ist

$$\{f : X \rightarrow V \mid f \text{ stetig}, \exists x \in X : \|f(x)\| < 1\}$$

ebenfalls ein Banachraum.

Aufgabe 2: Differenzierbare Funktionen (4 Punkte) 3

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Implikationen gültig sind (☒ W), oder nicht (☐ F).

☒ ☐ f ist stetig. ✓

☐ ☐ f ist lokal Lipschitz-stetig.

☒ ☐ ∇f ist stetig. ✓

☐ ☒ ∇f ist stetig partiell differenzierbar. ✓

Aufgabe 3: Banachscher Fixpunktsatz (4 Punkte) 4

Geben Sie jeweils an, ob die folgenden Sätze in der Vorlesung unter Zuhilfenahme des Banachschen Fixpunktsatzes bewiesen wurden (☒ W), oder nicht (☐ F).

☐ ☒ Satz von Bolzano-Weierstraß ✓

☐ ☒ Kettenregel ✓

☒ ☐ Satz über implizite Funktionen. ✓

☒ ☐ Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf ✓

Aufgabe 4: Satz von Schwarz (2+1+1 Punkte)

Geben Sie den Satz von Schwarz wieder.

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Definieren Sie die Hesse-Matrix von f bei x_0 .

Welche Eigenschaft der Hesse-Matrix folgt aus dem Satz von Schwarz?

Aufgabe 6: Taylorpolynom (5 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \supset B_{\frac{1}{2}}((0,1)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = e^x y^{-2}.$$

Finden Sie eine Funktion, $P^{(2)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, so dass gilt

$$f(h_x, 1+h_y) - P^{(2)}(h_x, h_y) = o(h^2)$$

für $h = (h_x, h_y) \rightarrow 0$.

$$P^{(2)} = f(x,y) + \langle h, \nabla f(x,y) \rangle$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x y^{-2} \\ -2e^x y^{-3} \end{pmatrix}, \quad u(x,y) = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Lokale Extrema (4+1+3 Punkte)

Sei $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ und

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}.$$

- (a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrema der Funktion f .
- (b) Zeigen Sie, dass $f|_S$ sein globales Maximum und globales Minimum annimmt.
- (c) Bestimmen Sie Lage und Art aller globalen Extrema der Funktion $f|_S$.

Aufgabe 8: Lineare DGL (3+2 Punkte)

Seien $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$.

- (a) Bestimmen Sie die maximale Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{\gamma} = 2t\gamma$$

zum Anfangswert $\gamma(t_0) = x_0$.

- (b) Bestimmen Sie die maximale Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{\gamma} = 2t\gamma + 2t^3$$

zum Anfangswert $\gamma(0) = x_0$.

Aufgabe 9: Stetige Funktionen auf kompakten Räumen (2+3 Punkte)

Sei X ein kompakter topologischer Raum und sei Y ein metrischer Raum. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig.

- (a) Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass dann $f(A)$ ebenfalls abgeschlossen ist.
- (b) Sei f außerdem bijektiv. Beweisen Sie, dass f ein Homöomorphismus ist, also dass $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ebenfalls stetig ist.

Achten Sie auf eine präzise, vollständige und nachvollziehbare Argumentation.