

Aufgabe 1: Topologische, metrische, normierte Räume (4 Punkte) Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Implikationen gültig sind (☒W) oder nicht (☐F).

- ✓ ☒ ☐F Jeder normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist auch ein metrischer Raum bzgl. der induzierten Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$.
- ✓ ☐W ☒ Jeder metrische Raum (X, d) ist auch ein normierter Raum bzgl. der induzierten Norm $\|x\| = d(x, 0)$.
- ✓ ☒ ☐F Für jede Menge X definiert $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie.
- ✓ ☐W ☒ Für jedes $A \subseteq X$ in einem topologischen Raum X gilt, $\bar{A} \subseteq A \subseteq A^\circ$.

(4/4)

Aufgabe 2: Stetige Funktionen (4 Punkte) Seien X und Y topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Implikationen gültig sind (☒W) oder nicht (☐F).

- ✓ ☒ ☐F $A \subset X$ wegzusammenhängend $\Rightarrow f(A) \subset Y$ wegzusammenhängend
- ✓ ☒ ☐F $A \subset X$ kompakt $\Rightarrow f(A) \subset Y$ kompakt
- ✓ ☐W ☒ $A \subset X$ abgeschlossen $\Rightarrow f(A) \subset Y$ abgeschlossen
- ✓ ☒ ☐F $B \subset Y$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(B) \subset X$ abgeschlossen

(4/4)

total diffbar

Aufgabe 3: Differenzierbare Funktionen (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Implikationen gültig sind (☒W) oder nicht (☐F).

- ✓ ☒ ☐F f ist differenzierbar $\Rightarrow f$ ist stetig
- ✓ ☐W ☒ f ist differenzierbar $\Rightarrow f$ ist stetig partiell differenzierbar
- ✓ ☒ ☐F f ist stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow f$ ist lokal Lipschitz stetig
- ✓ ☐W ☒ f ist Lipschitz stetig $\Rightarrow f$ ist differenzierbar

(4/4)

Aufgabe 4: Normen auf Funktionenräumen (3+1+2 Punkte)
 Sei $C([0, 1], \mathbb{R})$ der Raum der stetigen Funktionen $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \quad \text{und} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

beide eine Norm auf $C([0, 1], \mathbb{R})$ definieren.

(b) Zeigen Sie, dass $\|f\|_1 \leq \|f\|_{\infty}$ für alle $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$.

(c) Zeigen Sie, dass es keine Konstante $C < \infty$ geben kann, so dass $\|f\|_{\infty} \leq C \|f\|_1$ für alle $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ gilt.

a) z: $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ def. eine Norm auf $C([0, 1], \mathbb{R})$

(1) Bew: i) z: $\|f\|_{\infty} = 0 \Rightarrow f = 0$

Bew: $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ ✓

ii) z: $\|\lambda f\|_{\infty} = |\lambda| \|f\|_{\infty}$

Bew: $\|\lambda f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \cdot \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_{\infty}$ ✓

iii) z: $\|f+g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$ Δ -Ungl.

Bew: $\|f+g\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |g(x)|$
 $|a+b| \leq |a| + |b|$
 $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |g(x)|$ ✓

(2) z: $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ def. eine Norm auf $C([0, 1], \mathbb{R})$

Bew: i) z: $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$

Bew: $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ ✓

ii) z: $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$

Bew: $\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |\lambda f(x)| dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)| dx = |\lambda| \|f\|_1$ ✓

iii) z: $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ Δ -Ungl.

Bew: $\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x) + g(x)| dx \leq \int_0^1 |f(x)| + |g(x)| dx = \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |g(x)| dx$
 $= \|f\|_1 + \|g\|_1$ ✓

5) z: $\|f\|_1 \leq \|f\|_{\infty} \quad \forall f \in C([0, 1], \mathbb{R})$

Bew: $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| dx = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \cdot \int_0^1 1 dx = \|f\|_{\infty} \cdot 1 = \|f\|_{\infty}$ ✓

Aufgabe 5: Kettenregel in $\mathbb{R}^2$ (2+3 Punkte)

(a) Seien U, V, W endlichdimensionale reelle Vektorräume. Formulieren Sie die Kettenregel (inklusive Voraussetzungen) für zwei Funktionen $f: U \rightarrow V$ und $g: V \rightarrow W$.

(b) Betrachten Sie folgende Funktionen $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (x^2, x - y^2), \quad g(u, v) = (-v, u)$$

Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, an denen die Jacobi-Matrix der Verkettung $g \circ f$ den Wert

$$D(g \circ f)(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Ist $g \circ f$ dort ein lokaler Diffeomorphismus?

a) Sei U, V, W endlichdimensionale reelle Vektorräume. Sei W normiert. ~~Seien f, g stetig~~ Außerdem, gilt:

$f: U \rightarrow V$ ist diff'bar in $x \in U$
 $g: V \rightarrow W$ ist diff'bar in $f(x) \in V$

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$

Dann gilt, dass die Verkettung $g \circ f$ diff'bar ist in $x \in U$ und für ihr Differential gilt:

b) $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x - y^2 \end{pmatrix}, \quad g(u, v) = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$

$$D(g \circ f)(x, y) = Dg|_{f(x, y)} \cdot Df|_{(x, y)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 1 & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2y \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[Df|_{(x, y)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 1 & -2y \end{pmatrix}, Dg|_{f(x, y)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$\Rightarrow$ An der Stelle $(1, 1)$ ist $D(g \circ f)(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

lokaler Diffeomorphismus?

(i) $(g \circ f)$ stetig partiell diff'bar, da diff'bar (s. b.) und die Abl. stetig

(ii) $D(g \circ f)|_{(1, 1)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar, da $\det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -4 \neq 0$

$\Rightarrow g \circ f$ ist bei $(1, 1)$ ein lokaler Diffeomorphismus.

Aufgabe 6: Vektorfelder
 Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.
 (a) Zeigen Sie, dass
 (b) Geben Sie ein

Aufgabe 6: Vektorfelder (2+2 Punkte)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad}(f) = 0.$$

(b) Geben Sie ein Beispiel eines nicht-konstanten Vektorfeldes $v \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit

$$\operatorname{rot}(v) = 0.$$

a) $\operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \operatorname{rot} \circ \operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \end{pmatrix}$

↳ nach dem Satz von Schwarz gilt, dass für $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ die part. Abl. vertausch, also für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ gilt $\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.
Also gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 0$ usw.

⇒ $\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \square$

b)

Für v muss gelten:

$$\operatorname{rot}(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

0/

Aufgabe 7: Extrema unter Nebenbedingungen (1+5 Punkte)

Sei $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ und

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = e^{-xy}.$$

- Nimmt $f|_B$ sein globales Maximum und globales Minimum an?
- Bestimmen Sie die Lage des globalen Maximums und Minimums.

a) Ja, da $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ stetig
und $\{0\}$ eine abgeschlossene Menge und das U-Set
von $\{0\}$ ist $B \Rightarrow B$ ist abgeschlossen

und beschränkt, weil B sich in einen
offenen Ball mit Radius $r > 1$ einschließen lässt, also
z.B. liegt $B \subseteq B_3(x, y)$

und aus abgeschlossen und beschränkt folgt (Heine-Borel), dass
 B kompakt. Nach Bolzano-Weierstraß nimmt stetige Funktion
(f ist als Verküpfung stetiger Fkt. stetig) ihr Inf. und Sup. an,
also sein globales Max. und Min. auf kompakter Menge

$$b) f(x, y) = e^{-xy}, \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -ye^{-xy} \\ -xe^{-xy} \end{pmatrix}, \quad h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Nach Satz über Extrema unter Nebenbedingung $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, s.d. =
notwendige Bedingung: $\nabla f(x, y) = \lambda \cdot \nabla h(x, y)$ und 1. und 2. partielle Ableitungen!

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{I.} & -y \cdot e^{-xy} = \lambda \cdot 2x \\ \text{II.} & -x \cdot e^{-xy} = \lambda \cdot 2y \\ \text{III.} & x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} & \sim \frac{-y \cdot e^{-xy}}{2x} = \lambda \quad \text{und} \quad \frac{-x \cdot e^{-xy}}{2y} = \lambda \\ & \hookrightarrow \frac{-y \cdot e^{-xy}}{2x} = \frac{-x \cdot e^{-xy}}{2y} \quad | \cdot 2x \cdot 2y \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ kritischen Punkt bei $(0, 0)$
(passt, weil $0^2 + 0^2 \leq 1$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (-y \cdot e^{-xy}) \cdot 2y = (-x \cdot e^{-xy}) \cdot 2x \quad | : e^{-xy} \\ \Rightarrow & -2y^2 = -2x^2 \\ & x = y \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Aus III folgt: überall kritische Pkt.
für $|x| \leq 1$ und $|y| \leq 1$ und $x = y$

überprüfe glob. Max/Min: nach a) werden glob. Max u. Min angenommen,
also reicht es die kritischen Pkt. in f einzusetzen und die Funktionswerte
zu vergleichen: ✓

$$f(x, y) = e^{-xy}, \quad \text{für } x=y$$

$$\begin{aligned} \text{globales Max. bei } (0, 0): f(0, 0) &= e^{-0 \cdot 0} = 1 \\ \text{globales Min. bei } (1, 1): f(1, 1) &= e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

die restlichen krit.
Pkt. liegen dazwischen
je größer $|x|$ und $|y|$
desto kleiner der
Fkt. wert.

Aufgabe 8: Lineare DGL (2+2 Punkte)

Seien $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$.

- (a) Bestimmen Sie die maximale Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{\gamma} = 2t \sin(t^2) \gamma$$

zum Anfangswert $\gamma(t_0) = x_0$.

- (b) Bestimmen Sie den Lösungsraum der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{\gamma} = 2t \sin(t^2) \gamma + t e^{-\cos(t^2)}.$$

a) $y' = 2 \cdot t \cdot \sin(t^2) \cdot y$

Heuristik:

$$\frac{dy}{dt} = 2t \sin(t^2) y$$

$$\int_{x_0}^y \frac{1}{a} da = \int_{t_0}^t 2s \cdot \sin(s^2) ds$$

Sub: $u = s^2$
 $\frac{du}{ds} = 2s$
 $\Rightarrow ds = \frac{du}{2s}$

$$\ln(y) - \ln(x_0) = \int \sin(u) \cdot \frac{2s}{2s} du$$

$$\ln\left(\frac{y}{x_0}\right) = [-\cos(u)] \quad \text{Resub: } u = s^2$$

$$\ln\left(\frac{y}{x_0}\right) = -\cos(t^2) + \cos(t_0^2) \quad | \cdot$$

$$\frac{y}{x_0} = e^{-\cos(t^2) + \cos(t_0^2)} \quad | \cdot x_0$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-\cos(t^2) + \cos(t_0^2)} \cdot x_0$$

$\Rightarrow y(t) = e^{-\cos(t^2) + \cos(t_0^2)} \cdot x_0$ ist die max. Lsg. der hom. lin. DGL $y' = 2t \sin(t^2) y$, da

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\cos(t^2) + \cos(t_0^2)} \cdot x_0 \right) = 2t \sin(t^2) \cdot e^{-\cos(t^2) + \cos(t_0^2)} \cdot x_0 = 2t \sin(t^2) \cdot y$$

$\Rightarrow$ Betrachte Fall $y=0$ (wird in der Heuristik ausgeschlossen)
 $0 = 2t \sin(t^2) \cdot 0$ ist auch eine Lsg.

$$\Rightarrow y(t) = e^{-\cos(t^2) + \cos(t_0^2)} \cdot \left(x_0 + e^{-\cos(t_0^2)} \cdot \left(\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t_0^2 \right) \right)$$

$$= e^{-\cos(t^2) + \cos(t_0^2)} \cdot x_0 + e^{-\cos(t^2)} \cdot \left(\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t_0^2 \right)$$

b) $y' = 2t \sin(t^2) y + t e^{-\cos(t^2)}$

$$y(t) = \Phi(t) \cdot \left(x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) b(s) ds \right)$$

nach a) : $\Phi(t) = e^{-\cos(t^2) + \cos(t_0^2)}$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-\cos(t^2) + \cos(t_0^2)} \cdot \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{\cos(s^2) - \cos(t_0^2)} \cdot s \cdot e^{-\cos(s^2)} ds \right)$$

Betrachte das Integral:

$$\int_{t_0}^t e^{\cos(s^2) - \cos(t_0^2)} \cdot s \cdot e^{-\cos(s^2)} ds$$

$$= e^{-\cos(t_0^2)} \cdot \int_{t_0}^t s \cdot e^{\cos(s^2) - \cos(s^2)} ds$$

$$= e^{-\cos(t_0^2)} \cdot \int_{t_0}^t s ds$$

$$= e^{-\cos(t_0^2)} \cdot \left(\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t_0^2 \right)$$

Lösungsraum:

$$L_i = y + L_h := \{y + \xi | \xi \in L_h\}$$

$$\Rightarrow L_i = e^{-\cos(t^2) + \cos(t_0^2)} \cdot x_0 + \left(\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} t_0^2 \right) e^{-\cos(t^2)} + \xi \quad \text{mit } \xi \in L_h$$

also z.B. (nach a))

$$e^{-\cos(t^2) + \cos(t_0^2)} \cdot x_0$$

14

Aufgabe 9: Satz von Taylor und Extrema (1+2+2 Punkte)
 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f \in C^{k+1}(U, \mathbb{R})$ für ein $k \geq 0$.

(a) Formulieren Sie den Satz von Taylor.

(b) Es sei $f \in C^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ein lokales Maximum von f und $\text{Hess}(f)(x_0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann folgende dritten Ableitungen von f bei x_0 verschwinden:

$$\partial_1^3 f(x_0) = \partial_2^3 f(x_0) = 0.$$

(c) Zeigen Sie, dass sogar alle dritten Ableitungen von f bei x_0 verschwinden:

$$\partial_1^2 \partial_2 f(x_0) = \partial_1 \partial_2^2 f(x_0) = 0.$$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(k+1)$ -mal stetig part. diffbare Fkt.
 Sei außerdem $x_0 \in U$ und $h \in \mathbb{R}^n$, s.d. der Weg $\{x_0, x_0+h\}$ ganz in U liegt. Dann existiert ein $\theta \in (0,1)$ sodass gilt:

$$f(x_0+h) = \sum_{m=0}^k \frac{(h \cdot \nabla)^m f(x_0)}{m!} + \frac{(h \cdot \nabla)^{k+1} f(x_0 + \theta h)}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{m=0}^k \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^\alpha f(x_0 + \theta h)}{\alpha!} h^\alpha$$

b) $f \in C^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ l.h. Max von f , also $\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0) \\ \partial_2 f(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{und } \text{Hess}(f)(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x_0) & \partial_1 \partial_2 f(x_0) \\ \partial_1 \partial_2 f(x_0) & \partial_2^2 f(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Da $\partial_1^2 f(x_0) = \partial_1 \partial_2 f(x_0) = \partial_2 \partial_1 f(x_0) = \partial_2^2 f(x_0) = 0$, verschwindet dort auch die dritte Ableitung, da Ableitungen von 0 gleich 0, also folgt

$$\partial_1^3 f(x_0) = \partial_2^3 f(x_0) = 0$$

c) Da $\partial_1 \partial_2 f(x_0) = 0$, muss auch $\partial_1^2 \partial_2 f(x_0) = 0$

Da $\partial_2 \partial_1 f(x_0) = 0$, muss auch $\partial_1 \partial_2^2 f(x_0) = 0$

s. Hesse-Matrix

□