

Aufgabe 1: Stetige Funktionen und Zusammenhang (4 Punkte) Seien X und Y topologische Räume und sei $f : X \rightarrow Y$ stetig. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Implikationen gültig sind ($\boxed{W}$), oder nicht ($\boxed{F}$).

☐ ☒ $A \subset X$ abgeschlossen $\Rightarrow f(A) \subset Y$ abgeschlossen ✓

☐ ☐ $A \subset X$ zusammenhängend $\Rightarrow f(A) \subset Y$ zusammenhängend

☒ ☐ $A \subset X$ kompakt $\Rightarrow f(A) \subset Y$ kompakt ✓

☐ ☒ $B \subset Y$ kompakt $\Rightarrow f^{-1}(B) \subset X$ kompakt ✓

(3/4)

Aufgabe 2: Differenzierbare Funktionen (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Implikationen gültig sind ($\boxed{W}$), oder nicht ($\boxed{F}$).

☐ ☒ f ist stetig $\Rightarrow f$ ist Lipschitz-stetig ✓

☐ ☐ f ist eine Kontraktion $\Rightarrow f$ ist stetig

☒ ☐ f ist stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow f$ ist differenzierbar ✓

☒ ☐ f ist differenzierbar $\Rightarrow f$ ist stetig. ✓

(3/4)

Aufgabe 3: Vollständige Räume (4 Punkte)

Sei X ein metrischer Raum. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen gültig sind ($\boxed{W}$), oder nicht ($\boxed{F}$).

☐ ☒ Jede Cauchyfolge in X ist konvergent. ✓

☐ ☒ Die Metrik induziert eine Norm auf X . ✓

☒ ☐ Der Abschluss von $A \subseteq X$ ist gleich der Menge aller Grenzwerte von Folgen in A , die in X konvergieren. ✓

☒ ☐ Wenn $K \subseteq X$ kompakt ist, dann ist K beschränkt und abgeschlossen. ✓

(4/4)

Aufgabe 4: Banachscher Fixpunktsatz (2+2+1 Punkte)

- (a) Formulieren Sie den Banachschen Fixpunktsatz.
- (b) Beweisen Sie die Eindeutigkeit des Fixpunkts im Banachschen Fixpunktsatz.
- (c) Geben Sie ein Beispiel für eine Kontraktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bzgl. der euklidischen Metrik.

Aufgabe 5: Kettenregel in $\mathbb{R}^2$ (3+1 Punkte)

Betrachten Sie folgende Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, -x), \quad g(u, v) = (u - v, u + v)$$

- (a) Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, an denen die Jacobi-Matrix der Verkettung $g \circ f$ den Wert

$$D(g \circ f)(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat.

- (b) Ist $g \circ f$ dort ein lokaler Diffeomorphismus?

Aufgabe 6: Taylorpolynom (3+2 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \supset B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

Finden Sie eine Funktion, $P^{(2)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt

$$f(h_x, h_y) - P^{(2)}(h_x, h_y) = o(h^2)$$

für $h = (h_x, h_y) \rightarrow 0$.

(b) Seien $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$ beliebig. Betrachten Sie nun die Funktion

$$g: \mathbb{R}^2 \supset B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} + c_1x + c_2y + c_3xy + c_4x^2 + c_5y^2$$

Finden Sie eine Funktion, $Q^{(2)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt

$$g(h_x, h_y) - Q^{(2)}(h_x, h_y) = o(h^2)$$

für $h = (h_x, h_y) \rightarrow 0$.

Aufgabe 7: Lokale Extrema (3+2+2 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \sin(x) \sin(y).$$

- (a) Bestimmen Sie die Lage aller lokalen Extrema der Funktion f .
- (b) Bestimmen Sie die Art aller lokalen Extrema der Funktion f .
- (c) Nimmt f sein globales Maximum und globales Minimum an?

Aufgabe 8: Lineare DGL (3+2 Punkte)

Seien $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$.

- (a) Bestimmen Sie die maximale Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{\gamma} = 5t^4 \gamma$$

zum Anfangswert $\gamma(t_0) = x_0$.

- (b) Bestimmen Sie die maximale Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{\gamma} = 5t^4 \gamma + te^{t^5}$$

zum Anfangswert $\gamma(0) = x_0$.

Aufgabe 9: Kompaktheit (1+1+3 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum.

- (a) Definieren Sie was es bedeutet, dass ein $K \subseteq X$ kompakt ist.
- (b) Formulieren Sie den Satz von Bolzano-Weierstrass.
- (c) Sei X ein metrischer Raum. Beweisen Sie, dass eine kompakte Menge in X notwendigerweise beschränkt ist.

Achten Sie auf eine präzise, vollständige und nachvollziehbare Argumentation.