

Aufgabe 1: Topologische, metrische und normierte Räume (4 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen gültig sind (W), oder nicht (F).

✓ ☐ W ☒ F Es gilt $d(x, y) \geq d(x, z)$ für alle $x, y, z \in X$ mit $x \neq y$.

✓ ☒ F ☐ W Es gilt $d(x, x) = 0$ für alle $x \in X$.

☐ W ☐ F Die Funktion $x \mapsto d(x, 0)$ definiert eine Norm auf X .

(Ja!) } nur Notizen

✓ ☒ F ☐ W Die Kollektion $\{X, \emptyset\}$ definiert eine Topologie auf X .

3

Aufgabe 2: Offene und abgeschlossene Mengen (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $A, B \subset X$. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen gültig sind (W), oder nicht (F).

✓ ☒ F ☐ W $\bar{A}$ ist abgeschlossen.

✓ ☒ F ☐ W A ist offen $\Leftrightarrow A^c$ ist abgeschlossen.

(wahr!?)

✓ ☐ W ☒ F $\bar{A}$ ist offen $\Leftrightarrow A = X$.

(falsch, keine Regel!)

} nur Notizen

✓ ☐ W ☒ F $A \subseteq A^o$.

4

Aufgabe 3: Differenzierbare Funktionen (4 Punkte)

Betrachte $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Implikationen gültig sind (W), oder nicht (F).

✓ ☐ W ☒ F f ist stetig $\Rightarrow f$ ist stetig partiell differenzierbar.

✓ ☐ W ☒ F f ist partiell differenzierbar $\Rightarrow \nabla f$ ist stetig.

✓ ☒ F ☐ W f ist stetig partiell differenzierbar $\Rightarrow f$ ist lokal Lipschitz-stetig.

✓ ☒ F ☐ W f ist eine Kontraktion $\Rightarrow f$ ist Lipschitz stetig.

4

Aufgabe 4: Normen auf $\mathbb{R}^n$ (1+1+1+1 Punkte)
Betrachten Sie $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$.

- (a) Definieren Sie auf $\mathbb{R}^n$ die euklidische Norm und eine weitere Norm.
- (b) Definieren Sie die Äquivalenz zweier Normen auf $\mathbb{R}^n$.
- (c) Zeigen Sie, dass die zwei Normen aus (a) äquivalent sind.
- (d) Formulieren Sie den Satz von Heine-Borel.

(a) $\|\cdot\|_2$: $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ✓

$\|\cdot\|_\infty$: $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{ |x_i| \}$ für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ✓

(b) ~~Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum~~ Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ heißen äquivalent, wenn $\exists c, C > 0$, sd. $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $c \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C \cdot \|x\|_a$ ✓

(d) Sei K eine Teilmenge des (euklidische) Raums $\mathbb{R}^n$. Es gilt:

K kompakt $\Leftrightarrow K$ beschränkt und abgeschlossen

1 Schritt

Aufgabe 5: Ableitungen und Diffeomorphismen (2+1 Punkte) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ eine Funktion mit

$$Df|_{(-1,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ferner sei $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $(x, y) \mapsto g(x, y) = (e^x y, xy^3)$.

① Berechnen Sie $D(f \circ g)|_{(0,-1)}$.

② Ist $f \circ g$ bei $(0, -1)$ ein lokaler Diffeomorphismus?

Hinweis (unbedingt, da $f \in C^1$ und g auch als Komp. stetig diff.-barer Fkt.):

$$\textcircled{1} D(f \circ g)|_{(0,-1)} \stackrel{!}{=} Df|_{g(0,-1)} \circ Dg|_{(0,-1)} = Df|_{(-1,0)} \cdot Dg|_{(0,-1)}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x y & e^x \\ y^3 & x 3 y^2 \end{pmatrix} \bigg|_{(0,-1)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 P

② ~~Nein, da $D(f \circ g)|_{(0,-1)}$ nicht invertierbar ist, da~~

~~$\det \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -5 \cdot 0 - (-1 \cdot 2) = 2 \neq 0 \Rightarrow$ nicht invertierbar. Für lokalen Diffeom. müsste sie~~

Ja, da $D(f \circ g)|_{(0,-1)}$ invertierbar ist, da $\det \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -5 \cdot 0 - (-1 \cdot 2) = 2 \neq 0 \Rightarrow$ invertierbar. Da $D(f \circ g)|_{(0,-1)}$ invertierbar ist und $f, g \in C^1$ ist und dem Satz über Umkehrabb. $\S$ $f \circ g$ am Punkt $(0, -1)$ ein lokaler Diffeom. ✓

1 P

Aufgabe 6: Taylorpolynom (5 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \sin(x)y^{-3}.$$

Finden Sie ein Polynom zweiten Grades, $P^{(2)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so dass gilt

$$f(h_x, 1+h_y) - P^{(2)}(h_x, h_y) = o(h^2)$$

für $h = (h_x, h_y) \rightarrow 0$.

Entwicklungspunkt $x_0 = (0, 1)$, gesucht Taylorpolynom.

Taylorpolynom ist geg. als $P_{f, x_0}^{(2)}(h) = f(x_0) + \langle h, \nabla f(x_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle h, \text{Hess}(f)(x_0) \cdot h \rangle$ ✓ 1P

$$f(x_0) = f(0, 1) = 0 \quad \checkmark \quad 1P$$

$$\nabla f(x) = (\cos(x) \cdot y^{-3}, \sin(x) \cdot (-3)y^{-4}) \quad \checkmark \quad 1P$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_0) = (1, 0)$$

$$\Rightarrow \langle h, \nabla f(x_0) \rangle = \langle \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = h_x$$

$$\text{Hess}(f)(x_0) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \cdot y^{-3} & \cos(x) \cdot (-3)y^{-4} \\ \cos(x) \cdot (-3)y^{-4} & \sin(x) \cdot 12y^{-5} \end{pmatrix} \bigg|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad 1P$$

~~1P~~

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \langle h, \text{Hess}(f)(x_0) \cdot h \rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3h_y \\ -3h_x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (-3h_x h_y - 3h_x h_y) = -3h_x h_y$$

$$\Rightarrow P_{f, x_0}^{(2)}(h) = 0 + h_x - 3h_x h_y = h_x - 3h_x h_y \quad \checkmark \quad 1P$$

Aufgabe 7: Lokale Extrema (2+1+4 Punkte)

Sei $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ und

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = xe^{-y}.$$

(a) Bestimmen Sie Lage und Art aller lokalen Extrema der Funktion f .

(b) Zeigen Sie, dass $f|_S$ sein globales Maximum annimmt.

(c) Bestimmen Sie das globale Maximum von $f|_S$.

② ~~Bestimmen Sie die Lage und Art aller lokalen Extrema der Funktion f .~~

③ Fehle hat Extrema wenn gilt: $\nabla f = 0$ ✓

$$\nabla f(x, y) = (e^{-y}, -x \cdot e^{-y})$$

$$\neq 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$\nabla f(x, y)$ hat ~~keine~~ lokale Extrema, da $\nabla f(x, y) \neq 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$ ✓ 2/2

As was irrelevant for Aufgabe (a), da wir nur Extrema für f gefragt ist!

⇒ Randbetrachtung nötig, also Extrema unter Nebenbedingung $(x^2 + y^2 = 1)$

$$\Rightarrow \text{Definiere } h(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ ✓}$$

Für ∇ Extrema unter NB gilt, dass $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x, y) = \lambda \cdot \nabla h(x, y)$.

$$\Rightarrow \nabla f(x, y) = (e^{-y}, -x \cdot e^{-y}) ; \nabla h(x, y) = (2x, 2y)$$

$$\Rightarrow \text{I } e^{-y} = \lambda \cdot 2x$$

$$\text{II } -x \cdot e^{-y} = \lambda \cdot 2y$$

$$\text{III } x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x=0 \text{ und } y=0 \text{ nicht möglich}$$

④ $f|_S$ nimmt sein globales Max an, da gilt, dass S abgeschlossen und beschränkt ist (Erklärung gleich) und da S eine Teilmenge des Euklidischen Raums $\mathbb{R}^2$ ist folgt mit dem Satz von Heine-Borel, dass S kompakt ist. Und da S kompakt ist und $f|_S: S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig folgt mit dem Korollar von Weierstrass, dass $f|_S$ sein (globales) Max. (und Min.) hat/annimmt.

S ist ~~beschränkt~~ beschränkt, da x und y nicht beliebig groß werden dürfen, da $x^2 \geq 0$ und $y^2 \geq 0$ und die Addition ≤ 1 sein muss $\Rightarrow x^2 \leq 1$ und $y^2 \leq 1$ $\Rightarrow x, y \in [-1, 1]$.

(Weiter auf Extrakt)

⑦ S ist außerdem ~~abgeschlossen~~ ~~als Urbild einer abg. Menge~~, da ≤ 1 gilt und der Rand ($=1$) als Urbild einer abg. Menge unter einer stetigen Fkt (x^2+y^2) wieder abg. sein muss! (Sei $g=x^2+y^2 \Rightarrow g^{-1}(\{1\})$ abg., da $\{1\}$ abg.) ✓
1/1

© Wir haben gesehen, dass gilt $\nabla f(x,y) \neq 0 \forall x,y$.

Daraus folgt, dass $f|_S$ keine ~~Extrema~~ Extrema im Inneren haben kann.
 $\Rightarrow$ Randbetrachtung notwendig! ✓ (also für $x^2+y^2 < 1$)

Siehe ⑥!

Fortsetzung (*): ~~$x=0$~~ $x=0$ ist nicht möglich, da ~~in I~~ ein Widerspruch entsteht.

~~An II folgt~~ $y=0$ nicht möglich, da aus II dann folgt würde ~~$x=0$~~ $x=0$ (s.o.)
 $x=0$ auch nicht möglich, - II - - II - - II -

$\Rightarrow$ Einziger Fall ist $x \neq 0, y \neq 0$:

Sei $x \neq 0, y \neq 0$.

An II folgt: $-xe^{-y} = \lambda \cdot 2y \stackrel{I: (-x)}{\Leftrightarrow} e^{-y} = \frac{\lambda \cdot 2y}{-x}$

I und II gleichsetzen: $\lambda \cdot 2x = -\frac{\lambda \cdot 2y}{x}$ (da $e^{-y} = e^{-y}$)

$\stackrel{\cdot x}{\Leftrightarrow} 2x^2 = -2y \Leftrightarrow -x^2 = y \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-y}$ ✓

In III: $(\pm \sqrt{-y})^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow -y + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = 0$

1-q. Formel

$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1}, y_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$

$\Rightarrow y_1$ keine Lsg., da $y < 0$ sein muss, y_2 einzige Lsg. ✓

$\Rightarrow x = \pm \sqrt{-\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 1}\right)}$

$\Rightarrow$ zwei mögliche Lsg. für Extrema: $p_1 = \left(\sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}\right)$ und

$p_2 = \left(-\sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}\right)$

Da y bei beiden gleich, kann man anhand des x -Wertes ablesen, was das globale Max liegt. (nächste Seite)

Da $\frac{x}{e^x}$ für y konstant für ein größeres x größer ist, als für ein kleineres

$\Rightarrow$ globale Max. muss ~~an~~ jenes Punkt sein, wo ~~der~~ x größer ist.

Im Punkt p_2 ist das x negativ, im Punkt p_1 positiv

$\Rightarrow$ globaler Max von f_1 ist im Punkt $p_{0,1}$ (siehe Vordersatz :))

(entweder verzeichnet (unbedeutend) oder ganz wilde Nummer diese Aufgabe :)) ✓

4/4

(7/7)

Aufgabe 8: Lineare DGL (2+4 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie den Lösungsraum der folgenden homogenen linearen Differentialgleichung.

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma \quad \text{mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

- (b) Bestimmen Sie den Lösungsraum der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichung.

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma + \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

① $\gamma' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \gamma$ mit $A(t) = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

kein Aufgabewert
geg.!

Es handelt sich hierbei um ein autonomes System, dafür gibt es die Lösungsformel: $\gamma = e^{A \cdot t} \cdot c$ (unabhängig von t_0, x_0 und mit $c \in \mathbb{R}$, der Lösungsraum gesucht ist und somit unabhängig von AW sein muss!)
 $\Rightarrow \gamma_h = e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t} \cdot c$

$\Rightarrow L_h = \left\{ e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t} \cdot c \mid c \in \mathbb{R} \right\}$ (✓) ja, aber berechnen

1,5

Test: Das man bei autonomen DGL einfach ableiten kann mit Matrix, wie als wäre es eine einzelne Komponente gilt:

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t} \cdot c = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \gamma_h$ ✓

- ② Schritt 1: Löse homogenes System: Bereits in Teil ① gemacht

$\Rightarrow$ Propagator $\Phi(t) = e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t}$; Test $\Phi'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Phi(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \Phi(t) = A \cdot \Phi(t)$ ✓

Setze für konkrete Lsg. AW = (b_0, x_0)

Schritt 2: Variation der Konstanten: Formel mit 98: $\gamma(t) = \Phi(t) \cdot \left(x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} \cdot b(s) ds \right)$

mit $b(s) = \begin{pmatrix} 2 \\ s \end{pmatrix}$

(weiter auf Extrapapier)

8

$$\Rightarrow x_i(t) = e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot s} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ s \end{pmatrix} ds \right)$$

$$Sf'g = f - g - Sg' - f$$

mit Integralen
Matrix bzw. Vektor
Kontinuität! ~~ist gegeben!~~

$$e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t} \left(x_0 + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} e^{-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot s} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ s \end{pmatrix} - \int_{t_0}^t -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} e^{-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot s} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds \right)$$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$= e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t} \left(x_0 - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot e^{-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot s} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \int_{t_0}^t e^{-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot s} ds \right)$$

$$= \dots -11- \dots -11- \dots$$

$$= e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t} \left(x_0 - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot e^{-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot s} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ s \end{pmatrix} \right)$$

$$= e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t} \cdot x_0 + e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t} \left(-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot e^{-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot e^{-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t_0} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ t_0 \end{pmatrix} \right)$$

$$+ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot e^{-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot e^{-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t_0} \right)$$

98

$$\Rightarrow L_i = x_i(t) + L_h = L_i + x_i(t) + \left\{ e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot t} \cdot c \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

↑
siehe oben i

(berechnet (unvollständig) aber ganz viele Klammern :))
(Wo kann die Matrix auf einmal her und sie war nie
in der Übungsaufgabe :))

3,5

5

Aufgabe 9: Lösungen von DGLs schneiden sich nicht (5 Punkte)

Gegeben sei eine stetige Funktion

$$v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto v(x, t)$$

die eine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\gamma' = \underset{\vee}{f}(t, \gamma)$$

Für $a < b$, seien $\gamma_a, \gamma_b \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die eindeutigen maximalen Lösungen zu den Anfangswerten

$$\gamma_a(0) = a, \quad \gamma_b(0) = b.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\gamma_a(t) < \gamma_b(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Achten Sie auf eine präzise, vollständige und nachvollziehbare Argumentation.

Hinweis: Nehmen Sie widerspruchshalber an, es existiert ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\gamma_a(t) = \gamma_b(t)$.

Eine kleine unruh und raus bist du (als Aufgabe :-)).