

Name	
Matrikelnummer	

Bitte beachten: Es werden nur solche Antworten gewertet, die sauber aufgeschrieben und die verständlich begründet sind. Antworten, die nicht lesbar sind (Schrift etc.) werden wir nicht korrigieren. Auch sind alle Antworten zu begründen (Gegenbeispiel, Zitat eines Satzes etc.). Mindestpunktzahl zum Bestehen: 10 Punkte, Ausreichend 10–17 Punkte, Befriedigend 18–24 Punkte, Gut 25–32 Punkte, Sehr Gut ≥ 33 – Sie können frei wählen, welche Aufgaben Sie bearbeiten wollen.

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Sei $K = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$. Bitte begründen Sie, warum es keinen Banachraum E und kein $T \in \mathcal{L}(E)$ geben kann, mit $\text{Sp}(T) = K$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei (x_n) eine Folge in einem normierten Vektorraum E und für jede stetige Linearform $x' \in E'$ existiere eine Konstante $0 < m(x')$ mit

$$\sup_n |x_n, x'| \leq m(x').$$

Warum existiert dann eine Konstante $0 < M$ mit

$$\sup_n \|x_n\| \leq M.$$

Aufgabe 3. (2 + 2 = 4 Punkte) Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot | \cdot)$.

- (i) Zeige, dass für alle Paare $(x, y) \in H \times H$ stets $|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|$ gilt.
- (ii) Warum sind Vektoren x und y mit

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

linear abhängig?

Hinweis: Man bestimme $\|x + y\|^2$ und zeige $|(x | y)| = \|x\| \|y\|$.

Aufgabe 4. (2 Punkte) Sei E ein Banachraum und M ein abgeschlossener Teilraum. Wie ist die Quotientennorm auf E/M definiert?

Aufgabe 5. (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Sei E der reelle Vektorraum $C[0, 1]$ versehen mit der sup-Norm und sei

$$M = \{f \in E : f(0) = f(1) = 0\}.$$

- (i) Es ist M ein abgeschlossener Teilraum von E .
- (ii) Ist $\hat{f}$ die Nebenklasse in $\hat{E} = E/M$ für ein $f \in E$, so gilt

$$\|\hat{f}\| = \max\{|f(0)|, |f(1)|\}.$$

(iii) Ist $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ und T die Abbildung

$$(\alpha, \beta) \mapsto f: f(t) = \alpha(1-t) + \beta t,$$

so ist T eine Isometrie von $\mathbb{R}^2$ auf $\hat{E}$.

Aufgabe 6. (2 + 2 = 4 Punkte) Auf $C[0, 1]$, dem Raum der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$, betrachte man die Normen $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(s)| ds$ und $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.

(i) Diese Normen sind vergleichbar, aber nicht äquivalent.

(ii) Welches Grundprinzip der Funktionalanalysis impliziert, dass $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ kein Banachraum ist?

Aufgabe 7. (2 Punkte) Warum ist jeder endlichdimensionale normierte Vektorraum ein Banachraum und warum sind alle Normen auf diesem äquivalent?

Aufgabe 8. (2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte) Es sei H der Hilbertraum ℓ^2 , $\alpha = (\alpha_j)$ eine Folge in ℓ^∞ und α^* die Folge $(\overline{\alpha_j})$ und T_α bezeichnet die lineare Abbildung

$$x = (\xi_j) \in H \mapsto (\alpha_j \cdot \xi_j).$$

Zeigen Sie:

(i) Es ist T_α ein beschränkter Operator auf H mit $\|T_\alpha\| = \|\alpha\|_{\ell^\infty}$.

(ii) Die Hilbertraumadjungierte von T_α ist T_{α^*} .

(iii) Das Spektrum von T_α in $\mathcal{L}(H)$ ist der Abschluss der Menge $\{\alpha_j: j \in \mathbb{N}\}$ in dem metrischen Raum $\mathbb{C}$.

(iv) Es ist $\text{Sp}(T) = \text{Sp}_{\text{ap}}(T)$.

Aufgabe 9. (6 × 2 = 12 Punkte) Sei $E = \ell^1$ und für $x = (\xi_j) \in E$ sei

$$(Tx)(k) = \sum_{j \geq k} \xi_j, \quad k \in \mathbb{N}$$

Zeige:

(i) Es ist T ein stetiger Operator von ℓ^1 in c_0 .

(ii) Bestimmen Sie die Norm dieses Operators.

(iii) Warum kann man den zugehörigen adjungierten Operator als stetigen Operator von ℓ^1 in ℓ^∞ darstellen?

(iv) Geben Sie eine explizite Darstellung des adjungierten Operators von T an.

(v) Ist T ein kompakter Operator?

(vi) Kann T zu einem stetigen Operator auf den Banachraum c_0 fortgesetzt werden?