

Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein gesondertes Blatt und versehen es mit den Angaben: Name, Vorname und Aufgabennummer.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(p_1, \dots, p_n)$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor, d.h. $p_k \geq 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^n p_k^2 \geq \frac{1}{n}$. Wann genau gilt Gleichheit?

Hinweis: Betrachten Sie $\sum_{k=1}^n (p_k - \frac{1}{n})^2$.

Aufgabe 2 ($2 + 2 = 4$ Punkte)

An der Kasse eines Supermarktes steht ein Gerät, das die Echtheit von 100€-Scheinen feststellen soll. Es zeigt durch Aufblinken einer Leuchte an, dass ein Schein als falsch eingestuft wird. Sei r der Anteil von gefälschten 100€-Scheinen an allen in Umlauf befindlichen 100€-Scheinen. Sei c die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gerät bei einem falschen Schein aufblinkt, und d die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es bei einem echten Schein (irrtümlich) aufblinkt.

- Bestimmen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit p dafür, dass ein 100€-Schein echt ist, an dem das Gerät aufblinkt, in Termen von r , c und d .
- Die Kriminalstatistik verrät, dass unter 1000 100€-Scheinen rund ein Schein gefälscht ist. Der Hersteller des Gerätes gibt außerdem für die Leistungsfähigkeit des Gerätes die Werte $c = 0.99$ und $d = 0.01$ an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass ein 100€-Schein echt ist, an dem das Gerät aufblinkt?

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge $\mathcal{F}$ - $\mathcal{B}^*$ -messbarer Funktionen. Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung des Lemmas von Fatou: Gibt es eine μ -integrierbare Funktion g mit $g \leq f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$.

Hinweis: Lemma von Fatou der Vorlesung für nichtnegative messbare Funktionen

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ reelle Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeigen Sie, dass es Konstanten $c_1, c_2, \dots \in (0, \infty)$ gibt mit $X_n/c_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{f.s.}} 0$.

Hinweis: Seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \in (0, \infty)$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. Zeigen Sie zunächst, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $c_n \in (0, \infty)$ gibt mit $P(|X_n| > c_n \varepsilon_n) < \varepsilon_n$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty g\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) e^{-(x_1 + \cdots + x_n)} dx_1 \cdots dx_n = g(1).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 6 (3 + 2 + 2 + 1 = 8 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ seien X_n und Y_n reelle Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ gegeben durch $f_n(x, y) := (nx^{n-1} + ny^{n-1})/2$ für $x, y \in [0, 1]$ und $f_n(x, y) := 0$ sonst.

- a) Bestimmen Sie eine Dichte von X_n , eine Dichte von Y_n , $E(X_n)$, $E(Y_n)$ und $\text{Cov}(X_n, Y_n)$. Sind X_n und Y_n unabhängig? (Begründung!)

Hinweis: $E(X_n Y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_n(x, y) dx dy$

- b) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion F_n von X_n und Y_n , definiert durch $F_n(x, y) := P(X_n \leq x, Y_n \leq y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, und folgern Sie, dass F_n mit $n \rightarrow \infty$ punktweise gegen eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.
- c) Seien B, U, V unabhängige Zufallsvariablen mit $P(B = 0) = P(B = 1) = \frac{1}{2}$ sowie U und V jeweils gleichverteilt auf $[0, 1]$. Setze $X := BU + 1 - B$ und $Y := B + (1 - B)V$. Zeigen Sie, dass die Funktion F aus Teil b) die Verteilungsfunktion von (X, Y) ist.
- d) Konvergiert (X_n, Y_n) mit $n \rightarrow \infty$ in Verteilung und falls ja, wogegen? (Begründung!)

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Sei $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass $N(0, \sigma_n^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \varepsilon_0$, wobei ε_0 das Dirac-Maß im Punkt 0 bezeichnet.

Aufgabe 8 (2 + 3 = 5 Punkte)

Sei $\theta \in (0, \infty)$ und seien $X_1, X_2, \dots$ iid Zufallsvariablen mit Werten in $[\theta, \infty)$ und Dichte f gegeben durch $f(x) := 2\theta^2 x^{-3}$ für $x \in [\theta, \infty)$ und $f(x) := 0$ sonst. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $\underline{X} := (X_1, \dots, X_n)$.

- a) Bestimmen Sie einen Schätzer $U_n = T(\underline{X})$ für θ nach der Momenten-Methode. Ist die Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stark konsistent für θ ? (Begründung!)
- b) Zeigen Sie, dass $V_n := \min\{X_1, \dots, X_n\}$ ein Schätzer für θ nach der Maximum-Likelihood-Methode ist. Ist die Folge $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach konsistent für θ ? (Begründung!)

Viel Erfolg!