

Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein gesondertes Blatt und versehen es mit den Angaben: Name, Vorname und Aufgabennummer.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei $A_1, A_2, \dots$ eine Zerlegung einer nichtleeren Menge Ω , d.h. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \Omega$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F} := \{\bigcup_{i \in I} A_i \mid I \subseteq \mathbb{N}\}$ eine σ -Algebra in Ω ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathcal{F}$ mit $P(A) > 0$. Zeigen Sie, dass $\sup_{B \in \mathcal{F}} |P(B|A) - P(B)| = P(\bar{A})$, wobei $\bar{A} := \Omega \setminus A$.

Aufgabe 3 (1 + 2 = 3 Punkte)

Die Software der Video-Kamera einer Sicherheitsschleuse in einem Flughafen kann das Gesicht von gesuchten Personen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% erkennen. Jedoch identifiziert die Software mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% eine nicht gesuchte Person fälschlich als gesucht. Die Sicherheitsbehörden gehen davon aus, dass an einem bestimmten Tag eine Gruppe von 10 gesuchten Personen versuchen wird, die Schleuse zu passieren. Das Personenaufkommen pro Tag liegt bei 10000 Fluggästen. Mit der Präsenz weiterer gesuchter Personen ist am betrachteten Tag nicht zu rechnen.

- Mit wie vielen fälschlicherweise als gesucht identifizierten Personen ist zu rechnen?
- Die Software schlägt Alarm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde tatsächlich eine gesuchte Person entdeckt?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige reelle Zufallsvariablen. Setze $X := \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

- $X < \infty$ fast sicher.
- Es gibt ein $c \in (0, \infty)$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} P(X_n > c) < \infty$.

Aufgabe 5 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Seien X und Y ganzzahlige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung $P(X = Y = 0) = \frac{1}{2}$ und $P(X = n, Y = n) = P(X = n, Y = -n) = (\frac{1}{2})^{n+2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Bestimmen Sie die Verteilung von X und die Verteilung von Y .
- Berechnen Sie $E(X)$ und $\text{Var}(X)$ sowie $E(Y)$ und $\text{Var}(Y)$.
- Berechnen Sie die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$ von X und Y . Sind X und Y unabhängig? (Begründung!)

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. reelle Zufallsvariablen mit Dichte $f(x) := (1 - |x|)1_{[-1,1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Setze $S_n := X_1 + \dots + X_n$. Zeigen Sie, dass $S_n/\sqrt{n}$ mit $n \rightarrow \infty$ in Verteilung gegen eine Zufallsvariable S konvergiert, wobei $S \stackrel{d}{=} N(0, 1/6)$ normalverteilt ist mit Mittelwert 0 und Varianz $1/6$.

Bitte wenden!

Aufgabe 7 (1 + 2 + 3 = 6 Punkte)

Seien $X_2, X_3, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $P(X_n = n) = P(X_n = -n) = 1/(2n \log n)$ und $P(X_n = 0) = 1 - 1/(n \log n)$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie:

a) $E(X_n) = 0$ und $\text{Var}(X_n) = n/\log n$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

b) Die Folge $(X_n)_{n \geq 2}$ genügt dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass $\sum_{j=1}^n j/\log j \sim n^2/(2 \log n)$, wobei $a_n \sim b_n$ per Definition bedeutet, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$.

c) Die Folge $(X_n)_{n \geq 2}$ genügt nicht dem starken Gesetz der großen Zahlen.

Hinweis: Zeigen Sie, dass aus der Gültigkeit des starken Gesetzes folgen würde, dass X_n/n fast sicher gegen 0 konvergiert und führen Sie dies zu einem Widerspruch.

Aufgabe 8 (2 + 4 = 6 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, \dots, X_n$ nichtnegative i.i.d. Zufallsvariablen, wobei X_1 eine Dichte f besitze, die gegeben ist durch $f(x) := 2x/\theta^2$, falls $x \in [0, \theta]$ und $f(x) := 0$ sonst. Dabei ist $\theta \in (0, \infty)$ ein unbekannter Parameter.

a) Bestimmen Sie einen Schätzer U_n für θ nach der Momentenmethode. Ist die Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stark konsistent für θ ? (Begründung!)

b) Zeigen Sie, dass $V_n := \max(X_1, \dots, X_n)$ der Schätzer für θ nach der Maximum-Likelihood-Methode ist. Zeigen Sie ferner, dass die Folge $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stark konsistent für θ ist.

Hinweis: Zum Nachweis der starken Konsistenz zeigen Sie zunächst, dass V_n im Mittel gegen θ konvergiert.

Viel Erfolg!