

Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein gesondertes Blatt und versehen es mit den Angaben: Name, Vorname und Aufgabennummer.

Aufgabe 1 ($1 + 2 = 3$ Punkte)

Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $B_r := [-r, r]$ für $r \in (0, \infty)$.

- Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_{1/n}) = P(\{0\})$.
- Folgern Sie, dass $\sup_{r \in (0, \infty)} P(B_r) = 1$ und $\inf_{r \in (0, \infty)} P(B_r) = P(\{0\})$.

Aufgabe 2 ($3 + 1 = 4$ Punkte)

Sei $p := (p_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor. Jedes $m \in \mathbb{N}_0$ mit $p_m = \max_{k \in \mathbb{N}_0} p_k$ heißt ein Modus von p . Betrachte nun die hypergeometrische Verteilung mit Parametern $N \in \mathbb{N}$ und $R, n \in \mathbb{N}_0$ mit $R, n \leq N$, d.h. $p_k := \binom{R}{k} \binom{N-R}{n-k} / \binom{N}{n}$ für alle $k \in \{0, \dots, n\}$ und $p_k := 0$ sonst.

- Sei $k \in \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass $p_{k-1} < p_k$ genau dann gilt, wenn $k(N+2) < (R+1)(n+1)$.
- Zeigen Sie, dass $[(R+1)(n+1)/(N+2)]$ ein Modus von p ist, wobei $[x] := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$ die Gauß-Klammer von $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet.

Aufgabe 3 ($2 + 2 = 4$ Punkte)

Herr Spät fährt an 30% aller Arbeitstage mit dem Auto zur Arbeit, er geht zu Fuß an 30% aller Arbeitstage und er nimmt den Bus an 40% aller Arbeitstage. Er ist zu 3% verspätet bei der Arbeit, wenn er mit dem Auto fährt, zu 10% verspätet, wenn er zu Fuß geht und zu 7% verspätet, wenn er den Bus nimmt.

- Herr Spät kommt verspätet zur Arbeit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er den Bus genommen?
- Herr Spät erscheint pünktlich bei der Arbeit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er zu Fuß gegangen?

Aufgabe 4 ($1 + 2 + 2 = 5$ Punkte)

Seien X und Y zwei reelle Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte f gegeben durch $f(x, y) := 3 \min(x, y)$ für alle $x, y \in [0, 1]$ und $f(x, y) := 0$ sonst.

- Bestimmen Sie eine Dichte von X und eine Dichte von Y .
- Berechnen Sie $E(X)$ und $\text{Var}(X)$ sowie $E(Y)$ und $\text{Var}(Y)$.
- Berechnen Sie $\text{Cov}(X, Y)$. Sind X und Y unkorreliert? Sind X und Y unabhängig?

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Seien X und Y reelle Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Definiere $f_1(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f_2(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Sei $V := \min(X, Y)$ das Minimum von X und Y . Zeigen Sie, dass $f_1 + f_2$ eine Dichte von V ist.

Aufgabe 6 (1 + 2 + 3 = 6 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $P(X_n = \sqrt{n}) = 1/n = 1 - P(X_n = 0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch gegen 0 konvergiert.
- Für welche $p > 0$ konvergiert $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im p -ten Mittel und falls ja, wogegen? (Begründung!)
- Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht fast sicher konvergiert.

Hinweis: Lemma 12.5. Es darf auch (ohne Beweis) verwendet werden, dass für $x_1, x_2, \dots \in [0, 1)$ genau dann $\prod_{n \in \mathbb{N}} (1 - x_n) = 0$ gilt, wenn $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \infty$.

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Seien $X_1, Y_2, X_2, Y_2, \dots$ i.i.d. Zufallsvariablen, wobei X_1 gleichverteilt auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$ sei. Setze $Z_n := 1_{\{X_n \leq Y_n\}}$ und $S_n := Z_1 + \dots + Z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $2S_n/\sqrt{n} - \sqrt{n}$ mit $n \rightarrow \infty$ in Verteilung gegen $N(0, 1)$ konvergiert.

Aufgabe 8 (2 + 2 + 1 = 5 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, \dots, X_n$ positive i.i.d. Zufallsvariablen mit $P(X_1 \leq x) := \Phi(\log x - \theta)$ für alle $x > 0$, wobei Φ die Verteilungsfunktion von $N(0, 1)$ bezeichnet und $\theta \in (0, \infty)$ ein unbekannter Parameter sei.

- Zeigen Sie, dass $\log X_1$ normalverteilt ist mit Erwartungswert θ und Varianz 1, d.h. $\log X_1 \stackrel{d}{=} N(\theta, 1)$. Welche Verteilung hat folglich $T(\underline{X}) := n^{-1} \sum_{i=1}^n \log X_i$?

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass Summen unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt sind.

Für gegebenes $\theta_0 \in \mathbb{R}$ möchten wir die Hypothese $H : \theta \leq \theta_0$ gegen $K : \theta > \theta_0$ testen. Für eine noch zu bestimmende Konstante $c \in \mathbb{R}$ verwenden wir dazu einen einseitigen Test $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ der Form $\phi(\underline{x}) := 1_{(\theta_0 + c, \infty)}(T(\underline{x}))$, wobei $T(\underline{x}) := n^{-1} \sum_{i=1}^n \log x_i$.

- Zeigen Sie, dass die Gütefunktion π_ϕ von ϕ gegeben ist durch $\pi_\phi(\theta) = \Phi(\sqrt{n}(\theta - \theta_0 - c))$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und folgern Sie, dass ϕ das Niveau $\Phi(-c\sqrt{n})$ hat.
- Bestimmen Sie zu vorgegebenem $\alpha \in (0, 1)$ die Konstante c derart, dass ϕ ein Test zum Niveau α ist.

Viel Erfolg!