

Klausur zu Stochastische Prozesse

Elmar Teufl, Maximilian Flamm

1. Teil: Keine Hilfsmittel.**1. Aufgabe:** $(2 + 2 + 2 + 4 = 10 \text{ Punkte})$

- (a) Wann genau ist eine Zufallsvariable multivariat normalverteilt.
- (b) Was besagt der Satz von Cramér und Wold?
- (c) Für den Beweis welches Satzes wurde der Satz von Cramér und Wold verwendet.
- (d) Formulieren Sie diesen Satz und skizzieren Sie den Beweis.

2. Aufgabe: $(2 + 2 = 4 \text{ Punkte})$

- (a) Definieren Sie die Begriffe Submartingal, Supermartingal, Martingal.
- (b) Was besagt der Stoppsatz von Doob für Martingale mit abzählbarer Zeit?

3. Aufgabe: $(4 + 2 = 6 \text{ Punkte})$

- (a) Wie wurde das Ito-Integral definiert?
- (b) Was besagt die Ito-Isometrie?

2. Teil: Zehn DIN-A4-Blätter als Hilfsmittel.**4. Aufgabe:** (8 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $p \geq 1$ und es seien $X, X_0, X_1, \dots$ Zufallsvariable im $\mathcal{L}^p$ mit $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$. Zeigen Sie $E(X_n | \mathcal{G}) \xrightarrow{\mathcal{L}^p} E(X | \mathcal{G})$, wenn $\mathcal{G}$ eine Teil- σ -Algebra von $\mathcal{F}$ ist.

5. Aufgabe: (8 Punkte)

Es sei $\mathcal{V}$ eine Familie von gleichgradig integrierbaren Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeigen Sie, dass

$$\{E(X | \mathcal{G}) : X \in \mathcal{V}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ Teil-}\sigma\text{-Algebra}\}$$

ebenso gleichgradig integrierbar ist.

6. Aufgabe: (8 Punkte)

Es sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche-Bewegung. Zeigen Sie, dass $(\exp(cB_t - \frac{1}{2}c^2t))_{t \geq 0}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ ein Martingal ist.

7. Aufgabe: $(8 + 8 = 16 \text{ Punkte})$

Es sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie:

- (a) Für jedes feste $s \geq 0$ ist $(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$ ebenso eine Brownsche Bewegung.
- (b) Für jedes feste $s > 0$ ist $(sB_{t/s^2})_{t \geq 0}$ ebenso eine Brownsche Bewegung.