

A 1

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $U \neq \emptyset$.

2+2+6=10 Punkte

- a) Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, f und $\bar{f}$ seien holomorph. Zeigen Sie mit den Cauchy-Riemann-DGL: f ist lokal konstant ($\bar{f}$ ist die Funktion $z \mapsto \overline{f(z)}$).
- b) Geben Sie die ersten drei Terme ($\deg = -1, -2, -3$) des Hauptteils der Laurentreihe in 0 von $\frac{1}{z^2(1-z)}$ an. Welcher Singularitätentyp liegt vor?
- c) Sei $0 \in U$ und $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{0\})$ mit wesentlicher Singularität in 0. Zeigen Sie: Es gibt kein $R > 0$, s.d. f eingeschränkt auf $D_R(0) \setminus \{0\}$ injektiv ist.
(Tipp: Widerspruchsbeweis mit einem $z_0 \in V = \{z \in \mathbb{C} \mid R/2 < |z| < R\}$ und $w_0 := f(z_0)$).

Lösung:

Mit dem Residuensatz soll gezeigt werden: Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{x^2 + 4} = \frac{\pi 2^{\alpha-2}}{\cos(\pi\alpha/2)}.$$

Sei dazu $\gamma = \gamma_o \gamma_R \gamma_u \gamma_r$ wie im Bild und die auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ holomorphe α -te Potenz $z^\alpha := r^\alpha e^{i\alpha\varphi}$ für $z = re^{i\varphi}$ mit $0 < \varphi < 2\pi$. Sie dürfen $I_\alpha \in \mathbb{R}$ annehmen.

a) Bestimmen Sie die Residuen von $\frac{z^\alpha}{z^2+4}$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ und folgern Sie:

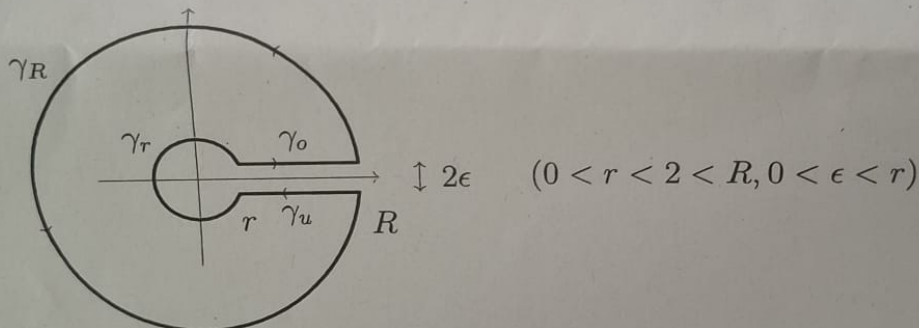
$$\int_\gamma \frac{z^\alpha dz}{z^2 + 4} = 2^{\alpha-1} \pi e^{i\pi\alpha/2} (1 - e^{i\pi\alpha}).$$

b) Begründen Sie, warum $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x + i\epsilon)^\alpha = x^\alpha$ und $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (x - i\epsilon)^\alpha = e^{2i\pi\alpha} x^\alpha$ ($x, \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$). Daraus folgt (muss nicht gezeigt werden):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_o} \frac{z^\alpha dz}{z^2 + 4} = \int_r^R \frac{x^\alpha dx}{x^2 + 4}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_u} \frac{z^\alpha dz}{z^2 + 4} = -e^{2i\pi\alpha} \int_r^R \frac{x^\alpha dx}{x^2 + 4}.$$

c) Zeigen Sie: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^\alpha}{z^2+4} = 0$ und $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{z^\alpha}{z^2+4} = 0$.

d) Zeigen Sie obige Formel für I_α .



Lösung:

A 3

5+7=12 Punkte

- a) Bestimmen Sie die Dimension des Lösungsraums und ein reelles Fundamentalsystem der DGL zu $p(T) = T^4 + 2T^2 + 1$, also

$$y'''' = -2y'' - y.$$

Welche Dimension hat der Raum der Lösungen mit $y(0) = 0$?

- b) Begründen Sie, warum

$$\begin{aligned} (t^2 + 1)y' &= -2y^2 t \\ y(0) &= y_0 \quad (y_0 \neq 0) \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung hat und bestimmen Sie sie. Geben Sie das maximale Existenzintervall an. Bestimmen Sie, was bei Annäherung an $T_{\pm}$ passiert (im Fall $T_{\pm}$ endlich).

Lösung: