

A 1

3+3+6=12 Punkte

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $U \neq \emptyset$.

- a) Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertig und holomorph. Zeigen Sie: f ist lokal konstant.
- b) Bestimmen Sie die ersten drei Terme ($\deg = 0, 1, 2$) der Taylor-Entwicklung von $\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ in $z = \frac{1}{\pi}$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius.
- c) Sei $0 \in U$ und $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{0\})$ mit wesentlicher Singularität in 0. Zeigen Sie: Es gibt kein $R > 0$, s.d. f eingeschränkt auf $D_R(0) \setminus \{0\}$ injektiv ist.
(Tipp: Widerspruchsbeweis zu Casorati-Weierstrass mit einem $z_0 \in V = \{z \in \mathbb{C} \mid R/2 < |z| < R\}$ und $w_0 := f(z_0)$).

Lösung:

a) $f = u + iv$ wobei $v = 0$

wegen C.R. ist $u_x = v_y = 0$, $u_y = -v_x = 0$
 Ann? $\Rightarrow f$ lokal konst.

b) $\frac{\partial}{\partial z} \cos\left(\frac{1}{z}\right) = +\sin\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}$

$$\frac{\partial^2}{(\partial z)^2} \cos\left(\frac{1}{z}\right) = \cos\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2} + \sin\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^3}$$

$$\begin{aligned} \leadsto \text{Taylor in } \cos\left(\frac{1}{z}\right) &= \cos(\pi) + \frac{0}{1!} \cdot \pi^2 \cdot \left(z - \frac{1}{\pi}\right) \\ &+ \frac{\cos(\pi) \cdot \pi^2 - \sin(\pi) \cdot \pi^3}{2!} \cdot \left(z - \frac{1}{\pi}\right)^2 + \dots \\ &= -1 + 0 \cdot \left(z - \frac{1}{\pi}\right) + \frac{\pi^2}{2} \cdot \left(z - \frac{1}{\pi}\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Konvergenzradius $R \geq$ Abstand zur nächsten Singularität (0) $= \frac{1}{\pi}$

Ang., $R \geq \frac{1}{\pi}$, dann in 0 holom. fortsetzbar $\nsubseteq$ wesentl. Sing. in 0
 (da Laurentreihenhauptteil ∞ -groß um 0)

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\pi}$$

c) Ang., $\exists R > 0: f|_{D_R(0) \setminus \{0\}}$ inj. Betrachte $V = D_{\frac{R}{2}, R}(0)$.

- Da V offen, $f|_V$ holom., ist $f(V)$ offen, d.h. für $z_0 \in V \exists \delta > 0$:

$$B_\delta(f(z_0)) \subseteq f(V)$$

- Nach Casorati-Weierstrass ist $f(B_{\frac{R}{2}}(0) \setminus \{0\})$ dicht in $\mathbb{C}$ (da in 0 wesentl. Sing.)

$$\Rightarrow \exists z_1 \in B_{\frac{R}{2}}(0) \setminus \{0\} : |f(z_1) - w_0| < \delta, \text{ d.h. } f(z_1) \in B_\delta(f(z_0)) \subseteq f(V)$$

$$\Rightarrow \exists z_2 \in V : f(z_1) = f(z_2) \nsubseteq z_1 \neq z_2, f \text{ inj.}$$

A 2 **3+2+4+3=12 Punkte**
Mit dem Residuensatz soll das folgende (existierende) Integral berechnet werden:

3+2+4+3=12 Punkte

Mit dem Residuensatz soll das folgende (existierende) Integral berechnet werden:

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1} dx}{\underbrace{x+1}_{=: f(x)}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Sei dazu $\gamma = \gamma_o \gamma_R \gamma_u \gamma_r$ wie im Bild und die auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ holomorphe α -te Potenz $\underline{z^\alpha} := r^\alpha e^{i\alpha\varphi}$ für $z = re^{i\varphi}$ mit $0 < \varphi < 2\pi$.

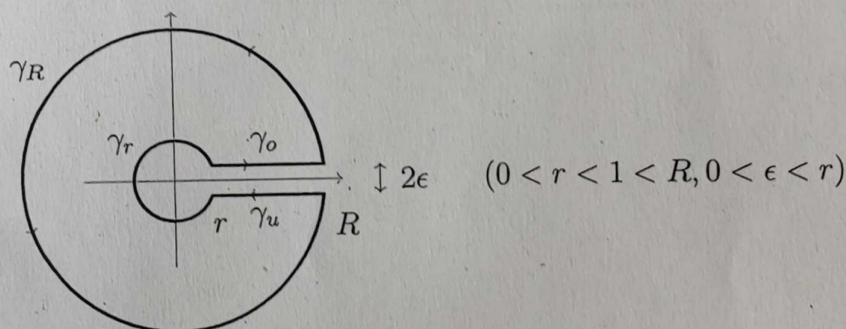
- a) Bestimmen Sie die Residuen von $\underbrace{\frac{z^\alpha}{z(z+1)}}_{=: f(z)}$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, folgern Sie $\int_\gamma \frac{z^\alpha dz}{z(z+1)} = -2i\pi e^{i\pi\alpha}$.
- b) Begründen Sie, warum $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}(x + i\epsilon)^\alpha = x^\alpha$ und $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}(x - i\epsilon)^\alpha = e^{2i\pi\alpha} x^\alpha$ ($x, \epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$). Daraus folgt (muss nicht gezeigt werden):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_o} \frac{z^\alpha dz}{z(z+1)} = \int_r^R \frac{x^{\alpha-1} dx}{x+1}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_u} \frac{z^\alpha dz}{z(z+1)} = -e^{2i\pi\alpha} \int_r^R \frac{x^{\alpha-1} dx}{x+1}.$$

- c) Zeigen Sie: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^\alpha dz}{z(z+1)} = 0$ und $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} \frac{z^\alpha dz}{z(z+1)} = 0$.

- d) Zeigen Sie obige Formel für I_α .

(Sie dürfen annehmen, dass das Integral existiert, $I_\alpha \in \mathbb{R}$).



Lösung:

a) Singularitäten sind auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$: -1 (da zweite Ling. $0 \notin \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$)

$$\text{Res}_{-1} f = \frac{(-1)^1 \alpha}{2 \cdot (-1) \cdot 1} = \frac{1 \alpha \cdot e^{i\pi \alpha}}{-1} = -e^{i\pi \alpha} \quad (-1 \text{ ist einf. Nst von Nenner, zähle holom. in } -1)$$

11

da - A é vongo

eingeschl. Gebiet

$$\int \frac{z^a dz}{z(z+1)} = 2\pi i \cdot \text{Res}_{-1} f = -2\pi i e^{i\pi a}$$

b) $(x + i\varepsilon = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}) \cdot e^{i \arctan(\frac{\varepsilon}{x})} \Rightarrow (x + i\varepsilon)^\alpha = (x^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\alpha}{2}} e^{i\alpha \arctan(\frac{\varepsilon}{x})}$
 $\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} x^\alpha \cdot e^{i\alpha \cdot 0} = x^\alpha$

$$x - i\varepsilon = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \cdot e^{i \underbrace{\arctan(\frac{\varepsilon}{x})}_{\in (-\frac{\pi}{2}, 0)}} = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \cdot e^{i(2\pi - \arctan(\frac{\varepsilon}{x}))}$$

$$\Rightarrow (x - i\varepsilon)^\alpha = (x^2 + \varepsilon^2)^{\frac{\alpha}{2}} e^{i(2\pi + \arctan(\frac{\varepsilon}{x}))\alpha} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} x^\alpha \cdot e^{i2\pi\alpha}$$

$$c) \left| \int \frac{z^n dz}{z^2+1} \right| \leq \underbrace{l(\gamma_R)}_{\leq 2\pi R} \cdot \max_{z \in \gamma_R} |f(z)| \leq 2\pi R \cdot \frac{R^2}{R^2-R} \rightarrow 0, \text{ da } n+1 < 2$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| &\stackrel{\text{major}}{\leq} 2\pi r \max_{z \in \gamma_r} |f(z)| \leq 2\pi r \cdot \frac{r^\alpha}{r-r^2} = 2\pi \frac{r^\alpha}{1-r} \rightarrow 0 \\
 &\leq \frac{|z^\alpha|}{|z^2+z|} \leq \frac{r^\alpha}{r-r^2} \leq \frac{2r^\alpha}{r}
 \end{aligned}$$

$|z^2+1| \geq 1 - |z|^2 = 1 - r^2$

c) Es gilt:

$$-2i\pi e^{i\alpha\pi} \stackrel{0.5}{=} \int_{\gamma} f(z) dz = \underbrace{\int_{\gamma_0} f}_{\rightarrow I_\alpha} + \underbrace{\int_{\gamma_R} f}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\int_{\gamma_0} f}_{\rightarrow -e^{i2\pi\alpha} I_\alpha} + \underbrace{\int_{\gamma_R} f}_{\rightarrow 0}$$

$$\Rightarrow -2i\pi e^{i\alpha\pi} \stackrel{0.5}{=} (1 - e^{i2\pi\alpha}) I_\alpha$$

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$
 $r \rightarrow 0$
 $R \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow I_\alpha = \frac{-2\pi i e^{i\alpha\pi}}{1 - e^{i2\pi\alpha}} = \pi \cdot \frac{-2i e^{i\alpha\pi}}{(e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha})} = -\pi \cdot \frac{1}{\sin(\pi\alpha)}$$

a) Geben Sie ein Fundamentalsystem an zu

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + ax_2 \\ x_2' = 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x' = Ax \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(abhängig von $a \in \mathbb{R}$).

b) Lösen Sie mit Variation der Konstanten

$$y' + \tan(t) \cdot y = \cos(t), \quad y(0) = 2$$

$$(\Omega = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}).$$

Lösung: a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3^2 & 2 \cdot 3a \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 3^3 & 3 \cdot 3^2 a \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 3^4 & 4 \cdot 3^3 a \\ 0 & 3^4 \end{pmatrix}$
 ind. $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} a \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Fund.-system sind Spalten von

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \begin{pmatrix} 3^n & n \cdot 3^{n-1} a \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}}{n!} \\ &= \begin{pmatrix} \sum \frac{t^n 3^n}{n!} & \sum \frac{t^n n \cdot 3^{n-1} a}{n!} \\ 0 & \sum \frac{t^n 3^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & ta \cdot \frac{d}{dt} e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t} & 3ate^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3ate^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) $y' = -\tan(t) y + \cos t, \quad y(0) = 2$

Tr. d. Var. für hom.: $\int \frac{2}{y} dy = - \int \frac{\tan(\tilde{t})}{\cos \tilde{t}} d\tilde{t} = - \int \frac{\cos(\tilde{t})}{1} ds = \ln(\cos(t)) - \ln 1 = \ln(\cos(t))$
 $\ln(y(t)) - \ln(c)$

$$\Rightarrow y(t) = c \cdot \cos(t)$$

Var. der Konstanten: Ansatz $y(t) = c(t) \cdot \cos(t)$

für inhom.

$$\begin{aligned} \text{Ls.} \quad y'(t) &= c'(t) \cdot \cos(t) + c(t) \cdot \sin(t) \\ &= -c(t) \cdot \sin(t) + \cos(t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \Rightarrow c'(t) = 1 \\ \Rightarrow c(t) = t + d \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = (t+d) \cdot \cos(t) \quad \text{PP: } 2 = y(0) = d \cdot 1$$

$$\Rightarrow y(t) = (t+2) \cdot \cos(t)$$