UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Daniele Agostini
Hannah Markwig
Clemens Nollau

Klausur Algebraischen Strukturen/ Test Lineare Algebra 2

Wintersemester 2023-24

Bearbeitungszeit: 2 Stunden 12.2.2024

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Art der Prüfüng: ☐ Klausur Algebraische Strukturen, ☐ Test Lineare Algebra II

Punkte: (von den Korrektoren auszufüllen!)

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4
von 10	von 10	von 10	von 10

Klausur Algebraische Strukturen **erreichte Punkte (von 30):** ___________ **Note:**

Test Lineare Algebra II **erreichte Punkte (von 40):** ___________ **Note:**

Bitte beachten Sie:

- Die Klausur der Algebraischen Strukturen besteht nur aus den ersten drei Aufgaben, der Test der Linearen Algebra II besteht aus allen vier Aufgaben.
- Handys müssen während der gesamten Klausur ausgeschaltet (**nicht** stummgeschaltet) werden! Smartwatches müssen während der Klausur abgelegt werden.
- Bearbeiten Sie pro Blatt höchstens eine Aufgabe und schreiben Sie die entsprechende **Aufgabennummer** und **Ihren Namen** auf **jedes Blatt**!
- Führen Sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Wo gerechnet werden muss, schreiben Sie nicht nur die Zahlen hin, sondern erklären und begründen Sie alles, was Sie tun.
- Sie können alle Ergebnisse aus den Vorlesungen und den Übungsblättern verwenden, sollten sie aber zitieren.
- Wenn eine Übung aus mehreren Teilen besteht, können Sie die Ergebnisse der vorangegangenen Teile für die nachfolgenden Teile verwenden, auch ohne sie zu beweisen.
- Nach dem Ende der Bearbeitungszeit von 2 Stunden müssen Sie **sämtliche** während der Klausur beschriebenen Blätter (auch Schmierpapier), aber nicht Ihren erlaubten DIN A4 Spickzettel, abgeben.
- Die Ergebnisse können im URM eingesehen werden. Die Einsicht findet am 13.2.2024 im Raum XXX von 9 bis 10 Uhr statt.

UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Daniele Agostini
Hannah Markwig
Clemens Nollau

Klausur Algebraischen Strukturen/ Test Lineare Algebra 2

Wintersemester 2023-24

Bearbeitungszeit: 2 Stunden 12.2.2024

Aufgabe 1 (4 + 2 + 4 Punkte) Wir betrachten die zwei Mengen

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass H und U Untergruppen von $GL_3(\mathbb{R})$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass U isomorph zu $(\mathbb{R}, +)$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler von H ist. Ist U ein Normalteiler von $GL_3(\mathbb{R})$?

Aufgabe 2 (4 + 3 + 3 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. wir betrachten die Abbildung

$$\pi_n : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x], \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} [a_i] x^i$$

(a) Zeigen Sie dass π_n ein surjektives Ringhomomorphismus ist, und dass $\ker \pi_n = (n)$.

(b) Zeigen Sie dass das Ideal $(n) \subseteq \mathbb{Z}[x]$ prim ist, genau dann, wenn $n = p$ ein Primzahl ist.

(c) Zeigen Sie dass das Ideal $(n) \subseteq \mathbb{Z}[x]$ nie maximal ist.

Aufgabe 3 (2 + 3 + 5 Punkte) Seien R ein kommutativer Ring, und $I, J \subseteq R$ zwei Idealen. Wir definieren das Produktideal IJ als

$$IJ := (ij \mid i \in I, j \in J)$$

(a) Zeigen Sie, dass $IJ \subseteq I \cap J$.

(b) Geben Sie ein Beispiel an in dem $IJ \subsetneq I \cap J$ gilt.

(c) Nehmen wir jetzt an, dass $I + J = R$. Zeigen Sie, dass $IJ = I \cap J$.

Nur für den Test der Lineare Algebra II

Aufgabe 4 (7 + 3 Punkte)

(a) Seien V, W zwei K-Vektorräume. Seien $x_1, x_2 \in V$ linear unabhängige Vektoren und seien $y_1, y_2 \in W$ so gewählt, dass $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass $y_1 = y_2 = 0$.

(b) Seien V ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_5 \in V$ und $\alpha \in \wedge^3 V$ definiert als

$$\alpha := 2v_1 \wedge v_2 \wedge v_5 - 2v_2 \wedge v_4 \wedge v_5 - v_3 \wedge v_5 \wedge v_1 - v_4 \wedge v_3 \wedge v_5$$

. Zeigen Sie, dass α zerlegbar ist.

Aufgabe 1 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, die das Kongruenzgleichungssystem

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 2 \\ x &\equiv 2 \mod 3 \\ x &\equiv 5 \mod 7 \end{aligned}$$

lösen.

Aufgabe 2 **(3+3=6 Punkte)**

Welche 3 äquivalenten Eigenschaften erfüllen noethersche Ringe? Begründen Sie außerdem, warum für einen Körper $\mathbb{K}$ dessen Polynomring $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch ist.

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie den Untergruppenverband von $\mathbb{Z}_{24}$ und geben Sie für die Untergruppen jeweils einen zyklischen Erzeuger sowie ihre Ordnung an.

Aufgabe 4 **(8 Punkte)**

Sei U eine Untergruppe einer Gruppe G. Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler von G ist, wenn G/U aus 2 Äquivalenzklassen besteht.

Aufgabe 5 **(2+4+4=10 Punkte)**

Sei $\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 10 & 7 & 3 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_{10}$ und sei $\sigma_2 := (1234) \in \mathbb{S}_4$.

(a) Schreiben Sie σ_1 als Produkt von Zykeln.

(b) Welche Ordnung hat σ_1? Welche Permutationen enthält die von σ_2 erzeugte Untergruppe in $\mathbb{S}_4$?

(c) Gibt es in $\mathbb{S}_4$ eine zyklische Untergruppe U_i der Ordnung i für $i = 2, 4, 6$? Falls ja, geben Sie einen möglichen zyklischen Erzeuger für U_i an. Falls nein, begründen Sie, warum nicht.

Aufgabe 6 **(4+4=8 Punkte)**

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $f := x^2 - 3x + 2 \in \mathbb{K}[x]$ und $g := x^2 - 4x + 3 \in \mathbb{K}[x]$ zwei Polynome.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(f, g)$ mit dem euklidischen Algorithmus.

(b) Berechnen Sie einen Erzeuger für das Hauptideal $\langle f \rangle \cap \langle g \rangle \subset \mathbb{K}[x]$.

Aufgabe 7 **(3+2=5 Punkte)**

(a) Nennen und beweisen Sie die Kürzungsregel für nullteilerfreie Ringe.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, in dem die Kürzungsregel in einem Ring mit Nullteilern nicht gilt.

Aufgabe 8 **(7 Punkte)**

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Zeigen Sie, dass $J := \{a \in R \mid \exists n : a^n = 0\}$ ein Ideal in R ist.

Aufgabe 1 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, die das Kongruenzgleichungssystem

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 2 \\ x &\equiv 2 \mod 3 \\ x &\equiv 5 \mod 7 \end{aligned}$$

lösen.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)**

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $x_1, \ldots, x_5 \in V$. Zeigen Sie, dass $\alpha \in \bigwedge^3 V$ mit

$$\alpha := 2x_1 \wedge x_2 \wedge x_5 - 2x_2 \wedge x_4 \wedge x_5 - x_3 \wedge x_5 \wedge x_1 - x_4 \wedge x_3 \wedge x_5$$

zerlegbar ist.

Aufgabe 3 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie den Untergruppenverband von $\mathbb{Z}_{24}$ und geben Sie für die Untergruppen jeweils einen zyklischen Erzeuger sowie ihre Ordnung an.

Aufgabe 4 **(8 Punkte)**

Sei U eine Untergruppe einer Gruppe G. Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler von G ist, wenn G/U aus 2 Äquivalenzklassen besteht.

Aufgabe 5 **(2+4+4=10 Punkte)**

Sei $\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 10 & 7 & 3 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_{10}$ und sei $\sigma_2 := (1234) \in \mathbb{S}_4$.

(a) Schreiben Sie σ_1 als Produkt von Zykeln.

(b) Welche Ordnung hat σ_1? Welche Permutationen enthält die von σ_2 erzeugte Untergruppe in $\mathbb{S}_4$?

(c) Gibt es in $\mathbb{S}_4$ eine zyklische Untergruppe U_i der Ordnung i für $i = 2, 4, 6$? Falls ja, geben Sie einen möglichen zyklischen Erzeuger für U_i an. Falls nein, begründen Sie, warum nicht.

Aufgabe 6 **(4+4=8 Punkte)**

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $f := x^2 - 3x + 2 \in \mathbb{K}[x]$ und $g := x^2 - 4x + 3 \in \mathbb{K}[x]$ zwei Polynome.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(f, g)$ mit dem euklidischen Algorithmus.

(b) Berechnen Sie einen Erzeuger für das Hauptideal $\langle f \rangle \cap \langle g \rangle \subset \mathbb{K}[x]$.

Aufgabe 7 **(7 Punkte)**

Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Seien $x_1, x_2 \in V$ zwei linear unabhängige Vektoren und seien $y_1, y_2 \in W$ mit $0 = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 \in V \otimes W$. Zeigen Sie, dass $y_1 = y_2 = 0$ gilt.

Aufgabe 8 **(7 Punkte)**

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Zeigen Sie, dass $J := \{a \in R \mid \exists n : a^n = 0\}$ ein Ideal in R ist.

UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Daniele Agostini
Hannah Markwig
Clemens Nollau

Nachklausur Algebraischen Strukturen/ Test Lineare Algebra 2

Wintersemester 2023-24

Bearbeitungszeit: 2 Stunden 25.3.2024

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Art der Prüfüng: ☐ Klausur Algebraische Strukturen, ☐ Test Lineare Algebra II

Punkte: (von den Korrektoren auszufüllen!)

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4
von 10	von 10	von 10	von 10

Klausur Algebraische Strukturen **erreichte Punkte (von 30):** ___________ **Note:**

Test Lineare Algebra II **erreichte Punkte (von 40):** ___________ **Note:**

Bitte beachten Sie:

- Die Klausur der Algebraischen Strukturen besteht nur aus den ersten drei Aufgaben, der Test der Linearen Algebra II besteht aus allen vier Aufgaben.
- Handys müssen während der gesamten Klausur ausgeschaltet (**nicht** stummgeschaltet) werden! Smartwatches müssen während der Klausur abgelegt werden.
- Bearbeiten Sie pro Blatt höchstens eine Aufgabe und schreiben Sie die entsprechende **Aufgabennummer** und **Ihren Namen** auf **jedes Blatt**!
- Führen Sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Wo gerechnet werden muss, schreiben Sie nicht nur die Zahlen hin, sondern erklären und begründen Sie alles, was Sie tun.
- Sie können alle Ergebnisse aus den Vorlesungen und den Übungsblättern verwenden, sollten sie aber zitieren.
- Wenn eine Übung aus mehreren Teilen besteht, können Sie die Ergebnisse der vorangegangenen Teile für die nachfolgenden Teile verwenden, auch ohne sie zu beweisen.
- Nach dem Ende der Bearbeitungszeit von 2 Stunden müssen Sie **sämtliche** während der Klausur beschriebenen Blätter (auch Schmierpapier), aber nicht Ihren erlaubten DIN A4 Spickzettel, abgeben.
- Die Ergebnisse können im URM eingesehen werden. Die Einsicht findet am 13.2.2024 im Raum XXX von 9 bis 10 Uhr statt.

UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Daniele Agostini
Hannah Markwig
Clemens Nollau

Nachklausur Algebraischen Strukturen/ Test Lineare Algebra 2

Wintersemester 2023-24

Bearbeitungszeit: 2 Stunden 25.3.2024

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)
Führen Sie in beiden Teilaufgaben Polynomdivision für $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ durch: Finden Sie $q, r \in \mathbb{Q}[x]$, sodass $f = qg + r$ und $\deg r < \deg g$ gilt.

(a) $f = x^6 - 1$ und $g = x^2 + x + 1$.

(b) $f = x^{2024}$ und $g = x^{1012} - 1$.

Aufgabe 2 (3 + 3 + 4 Punkte)
Betrachten Sie die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_7$.

(a) Schreiben Sie σ als Produkt disjunkter Zykel.

(b) Liegt σ in A_7?

(c) Zeigen Sie, dass S_6 keine zyklische Untergruppe der Ordnung 10 enthält.

Aufgabe 3 (3 + 4 + 3 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring.

(a) Für $b \in R$ definiere $\mathrm{Ann}(b) := \{a \in R : ab = 0\}$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Ann}(b)$ ein Ideal von R ist.

(b) Nehmen Sie an, dass R genau zwei Ideale besitzt. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

(c) Sei $\phi : S \to R$ ein Ringhomomorphismus und I ein Ideal von R. Zeigen Sie, dass $\phi^{-1}(I)$ ein Ideal von S ist.

Nur für den Test der Lineare Algebra II

Aufgabe 4 (7 + 3 Punkte)

(a) Sei V ein K-Vektorraum und $x, y \in V$. Zeigen Sie, dass $x \otimes y = y \otimes x$ genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind.

(b) Betrachte folgenden Tensor in $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2$:

$$\alpha = -2e_3 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_1 + 2e_2 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_1 + 2e_1 \otimes e_2 + 4e_2 \otimes e_2.$$

Zeigen Sie, dass α ein Tensor von Rang 1 ist.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, die das Kongruenzgleichungssystem

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \mod 2 \\ x &\equiv 4 \mod 5 \\ x &\equiv 2 \mod 7 \end{aligned}$$

lösen.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Schreiben Sie den Tensor

$$T := \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2$$

als minimale Summe von reinen Tensoren, d.h. als Summe von Matrizen vom Rang 1.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $B_n := (1, x^1, \ldots, x^n)$ die Standardbasis des $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ und sei $B_n^\vee$ die zu B_n duale Basis. Geben Sie die Basisdarstellung von $\mathrm{ev}_{-2,n} : \mathbb{K}[x]_{\leq n} \to \mathbb{K}, p \mapsto p(-2)$ bezüglich $B_n^\vee$ an.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei U eine Untergruppe einer Gruppe G. Zeigen Sie, dass U ein Normalteiler von G ist, wenn G/U aus 2 Äquivalenzklassen besteht.

Aufgabe 5 (3+3+3=9 Punkte)

Sei die Gruppe $(\mathbb{Z}_{18}, +)$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie jeweils die Ordnung von $[4], [5], [9] \in \mathbb{Z}_{18}$.

(b) Bestimmen Sie Untergruppen $U_2, U_6, U_{18} \subset \mathbb{Z}_{18}$ derart, dass die Ordnung von U_i gleich i ist für $i = 2, 6, 18$.

(c) Geben Sie alle zyklischen Erzeuger für jede der Untergruppen U_i für $i = 2, 6, 18$ aus (b) an.

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ mit charakteristischem Polynom

$$\chi_f(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \lambda_i)$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$ für $i = 1, \ldots, n$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{f \wedge f}$ von $f \wedge f : \bigwedge^2 V \to \bigwedge^2 V$.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $f \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom vom Grad 2 oder 3. Zeigen Sie, dass f genau dann irreduzibel ist, wenn f keine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und sei $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass $J := \{a \in R \mid \exists n : a^n \in I\}$ ein Ideal in R ist.